

TRABAJO FINAL DE MAESTRÍA

EL SISTEMA Y EL ATRACTOR GEOMÉTRICO DE LORENZ

Presentado por:

RAMIRO HERNANDO BUITRAGO PUENTES
Estudiante Maestría en Matemáticas

Director:
SERAFIN BAUTISTA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ
2010

Índice general

1. Introducción	3
2. Preliminares	5
3. El atractor de Lorenz	9
3.1. Propiedades básicas de la ecuación de Lorenz	10
3.1.1. Simetría	11
3.1.2. El eje z	11
3.1.3. Existencia de un conjunto acotado globalmente attracting de volumen cero	11
3.1.4. Puntos de equilibrio	13
3.1.5. Resumen	16
4. Bifurcación de Hopf	17
4.1. Teorema de la variedad central	17
4.2. Teorema de la bifurcación de Hopf	19
4.3. Colocación de raíces en el eje imaginario	21
4.4. Velocidad de cruce de los valores propios a través del eje imaginario .	23

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	2
4.5. Bifurcación de Hopf en el sistema Lorenz	26
4.5.1. Sea $r=\mu$, parámetro de bifurcación y (σ, b) parámetros de control	26
4.5.2. Cálculo de la variedad central, (coeficiente de Lyapunov) . . .	31
5. El atractor geométrico de Lorenz	42
5.1. Análisis del atractor geométrico	44
5.2. El atractor geométrico de Lorenz es una clase homoclínica	50
5.3. Demostración de teoremas	52
5.3.1. Lemas previos	52
Índice	61

Capítulo 1

Introducción

Edward N. Lorenz (1917 – 2008), matemático y meteorólogo interesado en formular ecuaciones que modelaran algunas de las características del proceso de convección en el seno de la atmósfera y que fueran útiles para la predicción del tiempo, planteó en 1963 el siguiente sistema autónomo tridimensional de ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$(x', y', z') = (\sigma y - \sigma x, rx - y - xz, xy - bz),$$

donde σ, r, b son parámetros reales positivos, el cual se conoce como *el sistema de Lorenz* y cuya evolución en el tiempo para los parámetros $\sigma = 10$, $b = 8/3$ y $r = 28$ exhibe un atractor extraño (W. Tucker - 1998) llamado *el atractor de Lorenz* (un atractor se define como un conjunto sumidero el cual contiene una órbita densa).

Fijando los parámetros $\sigma = 10$ y $b = 8/3$, Lorenz demostró que para todos los valores de r existe un elipsoide en \mathbb{R}^3 en el que las órbitas entran transversalmente. Esto implica que dentro de éste elipsoide hay un atractor global, en el que tiene lugar toda la dinámica relevante. El análisis paramétrico de la bifurcación del sistema Lorenz a partir de la bifurcación de Hopf, permite manipular el valor del parámetro r para determinar la estabilidad de las órbitas periódicas que aparecen o desaparecen y clasificar el espacio de parámetros en los tres tipos de bifurcación de Hopf que pueden ocurrir: subcrítica, supercrítica y degenerada. Para el valor de $r_H \approx 24,74$ el sistema de Lorenz presenta una bifurcación de *Hopf* en la que dos puntos fijos pasan a ser repulsores.

Motivados por los resultados sorprendentes del sistema de Lorenz, por ejemplo, la sensibilidad a las condiciones iniciales, *J. Guckenheimer y R.F. Williams* (1976) introdujeron el atractor geométrico de Lorenz, como un modelo para explicar el comportamiento de las soluciones del sistema de Lorenz. El atractor geométrico de Lorenz es un atractor en $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ (la 3-esfera) dado por un campo Y que recoge algunas propiedades observables del sistema de Lorenz, el cual tiene como bloque aislante un bitoro sólido U en \mathbb{R}^3 tal que el flujo Y_t es transversal y apunta hacia adentro a lo largo de su frontera. Se define

$$\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} Y_t(U)$$

el conjunto maximal de Y en U . El conjunto Λ se llama el *atractor geométrico de Lorenz* el cual no es hiperbólico, sin embargo, presenta propiedades interesantes por ejemplo: es la clausura de sus órbitas periódicas, es transitivo, presenta sensibilidad con respecto a condiciones iniciales y es una clase homoclínica como se demostró en [B].

Capítulo 2

Preliminares

Un subconjunto M de \mathbb{R}^n es una variedad de dimensión k (o simplemente una k -variedad), si para cada punto x de M existen un conjunto U abierto en \mathbb{R}^n que contiene a x , un abierto W de \mathbb{R}^k , y una función $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ inyectiva de clase C^∞ tales que:

1. $\varphi(W) = M \cap U$,
2. $d\varphi(y) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ tiene rango k para todo $y \in W$,
3. $\varphi^{-1} : \varphi(W) \rightarrow W$ es continua.

donde la función φ es un sistema de coordenadas alrededor de x .

- Se dice que N es una **subvariedad** de M , si M y N son variedades en \mathbb{R}^n y $N \subset M$.

Observación 1 Si M y N son variedades se dice que $N \times M$ también es una variedad.

Dada una variedad diferenciable de dimensión n , su **fibrado tangente** es la variedad diferenciable TM de dimensión $2n$ que se forma considerando en cada punto $p \in M$ el espacio vectorial T_pM .

$$TM = \{(p, v)/p \in M \text{ y } v \in T_p M\}$$

Sean M una 3-variedad Riemanniana cerrada (compacta sin borde) y X un campo vectorial en M de clase C^1 , denotaremos por X_t el flujo generado por X .

Una *órbita* de X es el conjunto $O = O_X(q) = \{X_t(q) : t \in \mathbb{R}\}$ para algún $q \in M$. Una *singularidad* de X es un punto $\sigma \in M$ tal que $X(\sigma) = 0$ (equivalentemente $O_X(\sigma) = \{\sigma\}$). Una *órbita periódica* de X es una órbita $O = O_X(p)$ tal que $X_T(p) = p$ para algún número mínimo $T > 0$ (equivalentemente O es compacto y $O \neq \{p\}$). Una *órbita cerrada* de X es una singularidad ó una órbita periódica de X .

El *conjunto omega limite* de un punto $p \in M$ es el conjunto $\omega_X(p) = \{x \in M : x = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{t_n}(p), \text{ para alguna sucesión } t_n \rightarrow \infty\}$. Un punto $p \in M$ es llamado *no-errante* para X si para cada $T > 0$ y cada vecindad U de p en M existe $t > T$ tal que $X_t(U) \cap U \neq \emptyset$. El conjunto de puntos no-errantes de X es denotado por $\Omega(X)$ ó $\Omega(X_t)$.

Un conjunto compacto $\Lambda \subset M$ es:

- *Invariante* si $X_t(\Lambda) = \Lambda, \forall t \in \mathbb{R}$;
- *Transitivo* si $\Lambda = \omega_X(p)$ para algún $p \in \Lambda$;
- *No-trivial* si Λ no es una órbita cerrada de X ;
- *Aislado* si existe una vecindad compacta U de Λ tal que

$$\Lambda = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} X_t(U)$$

(U es llamado *bloque aislante*);

- *Attracting* si es aislado y tiene un bloque aislante positivamente invariante U , i.e.,

$$X_t(U) \subset U, \quad \forall t \geq 0;$$

- *Atractor* si es attracting transitivo.

Definición 1 Un conjunto compacto $\Lambda \subset M$ e invariante por X_t es *Hiperbólico* para X_t , si existen constantes positivas K, λ y una descomposición continua del fibrado tangente de M sobre Λ de la forma $T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^X \oplus E_\Lambda^u$, tal que $\forall p \in \Lambda$:

1. $\|DX_t(p)/E_p^s\| \leq Ke^{-\lambda t}, \forall t > 0$ (E_Λ^s es el subfibrado (K, λ) -contractor);
2. $\|DX_{-t}(p)/E_p^u\| \leq Ke^{-\lambda t}, \forall t > 0$ (E_Λ^u es el subfibrado (K, λ) -expansor);
3. $E_\Lambda^X = \langle X \rangle$ (E_Λ^X es la dirección del campo).

Una *órbita homoclínica transversa* asociada a una órbita periódica hiperbólica O de X es una órbita $\gamma \subset W^s(O) \cap W^u(O)$, donde $W^s(O)$ y $W^u(O)$ representan la variedad estable e inestable respectivamente de la órbita O . La *clase homoclínica* de una órbita periódica hiperbólica O de X , notada por $H(O)$, es la clausura de la unión de las órbitas homoclínicas transversas de O .

Dado un operador lineal L , definimos por $m(L) = \inf_{v \neq 0} \frac{\|Lv\|}{\|v\|}$ la co-norma de L .

Definición 2 Sea $\Lambda \subset M$ un conjunto compacto invariante de X . Una descomposición continua y DX_t -invariante del fibrado tangente de M sobre Λ , de forma

$$T_\Lambda M = E_\Lambda \oplus F_\Lambda,$$

es una descomposición dominada, si existen constantes positivas K, λ y una métrica Riemanniana en M tal que

$$\frac{\|DX_t(x)/E_x\|}{m(DX_t(x)/F_x)} \leq Ke^{-\lambda t}, \quad \forall x \in \Lambda, \forall t > 0.$$

El subfibrado F es (K, λ) -dominado por el subfibrado E .

Definición 3 Un conjunto compacto invariante Λ de X es *parcialmente hiperbólico*, si este exhibe una descomposición dominada

$$T_\Lambda M = E_\Lambda^s \oplus E_\Lambda^c,$$

tal que E_Λ^s es un subfibrado (K, λ) -contractor, e.d.,

$$\|DX_t(x)/E_x^s\| \leq Ke^{-\lambda t}, \quad \forall x \in \Lambda, \forall t > 0.$$

y el subfibrado E_Λ^c es llamado el subfibrado central.

Para $x \in \Lambda$ y $t \in \mathbb{R}$ sea $J_t^c(x)$ el valor absoluto del determinante de la transformación lineal

$$DX_t(x)/_{E_x^c} : E_x^c \rightarrow E_{X_t(x)}^c.$$

Diremos que un conjunto Λ parcialmente hiperbólico *expande volumen* (ó (K, λ) -*expande volumen*) en el subfibrado central, si

$$J_t^c(x) \geq K^{-1}e^{\lambda t}, \quad \forall x \in \Lambda, \forall t > 0.$$

Definición 4 *Un conjunto Λ compacto invariante de X_t es singular-hiperbólico por X_t si Λ es parcialmente hiperbólico, expande volumen en el subfibrado central y cada singularidad en Λ es hiperbólica.*

Capítulo 3

El atractor de Lorenz

En la década de los 1950s, Edward Norton Lorenz (Mayo 23, 1917 - Abril 16, 2008) matemático y meteorólogo estadounidense pionero en la teoría del caos, teniendo en consideración que la mayoría de los fenómenos involucrados en la predicción del tiempo son de naturaleza no lineal, comenzó a dudar de la aplicabilidad de los modelos estadísticos lineales en meteorología. Su trabajo en este tópico culmina con la publicación en 1963 del hoy famoso artículo **Deterministic Non-periodic Flow** en la revista *Journal of the Atmospheric Sciences*, y con su descripción del Efecto Mariposa establece los cimientos de la Teoría del Caos.

Lorenz construyó un modelo matemático para el movimiento de las masas de aire en la atmósfera, derivado de una forma simplificada de las ecuaciones de convección térmica surgidas de las ecuaciones de la atmósfera. Como Lorenz estudiaba los patrones del tiempo, comenzó a darse cuenta que ellos no siempre cambiaban de la manera predicha. En 1961, utilizando su computador para simulación numérica usó como dato de entrada el término decimal 0,506 como una aproximación menos precisa del dato de entrada 0,506127, obteniendo como resultado, de acuerdo a las dos tabulaciones de datos arrojadas, dos escenarios climáticos completamente diferentes. Pequeñas variaciones en el dato inicial de sus variables resultarían en groseras diferencias en los patrones de comportamiento del clima. Esta dependencia sensitiva a las condiciones iniciales llegó a ser conocida como el efecto mariposa. Lorenz describió este comportamiento en un sistema de ecuaciones, para ello se sirvió de la ecuación de Navier-Stokes y de la ecuación térmica a las que tras aplicar una serie de transformaciones de Fourier dedujo un sistema de tres ecuaciones relativamente

simples que resultaron ser un objeto dinámico extremadamente complicado conocido ahora como el atractor de Lorenz. Las ecuaciones de Lorenz son:

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= -bz + xy \end{cases}$$

donde σ, r, b son reales positivos, el parámetro σ : *Número de Prandtl* = [viscosidad] / [conductividad térmica], el parámetro r : *Número Rayleigh* = diferencia de temperatura entre la base y el tope del sistema y b = razón entre la longitud y altura del sistema y donde x = razón de rotación del sistema (velocidad de flujo del fluido).

Si $x > 0$ el fluido circula en sentido horario mientras que si $x < 0$ el fluido circula en sentido antihorario. $y :=$ variación de la temperatura horizontal y $z :=$ variación de la temperatura vertical. σ y b dependen de las propiedades del material y propiedades geométricas de la capa de fluido. Numéricamente, para los parámetros $\sigma = 10$, $r = 28$ y $b = \frac{8}{3}$ (conocidos como los parámetros de Lorenz) exhibe un comportamiento caótico. Ver Figura 3.1.

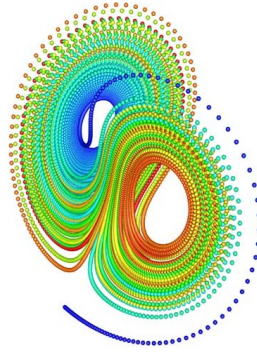


Figura 3.1: *Atractor de Lorenz*

3.1. Propiedades básicas de la ecuación de Lorenz

Las siguientes propiedades son tomadas de [SP], donde es posible encontrar un análisis más riguroso de las mismas.

3.1.1. Simetría

La ecuación de Lorenz tiene una simetría natural $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$. Esta simetría persiste para todo valor de los parámetros. La simetría significa que si $(x(t), y(t), z(t))$ es solución, entonces $(-x(t), -y(t), z(t))$ también lo es, luego cualquier solución o es simétrica o tiene una compañera simétrica.

3.1.2. El eje z

El eje z dado por los puntos del espacio donde $x = y = 0$, es invariante. Todas las trayectorias que comienzan en el eje z , permanecen en él y tienden hacia el origen $(0, 0, 0)$. Además, todas las trayectorias que giran alrededor del eje z lo hacen en sentido de las manecillas del reloj cuando se miran sobre el plano $z = 0$. Esto se sigue del hecho que si $x = 0$ tenemos: $\frac{dx}{dt} > 0$ cuando $y > 0$, y $\frac{dx}{dt} < 0$ cuando $y < 0$. Podemos dar una descripción parcial de las órbitas periódicas en el sistema, contando el número de veces que ellos giran alrededor del eje z .

3.1.3. Existencia de un conjunto acotado globalmente attract-ing de volumen cero

La divergencia del flujo, $\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -(\sigma + b + 1) = -(13 + 2/3)$ para los parámetros de Lorenz. Así, un elemento de volumen V , es contraído por el flujo en un elemento de volumen $V \exp(-(\sigma + b + 1)t)$ en un tiempo t , es decir, el sistema de Lorenz es disipativo, los volúmenes en el espacio de fase se contraen (con velocidad exponencial) bajo la acción del flujo. Esta propiedad permite demostrar que las ecuaciones de Lorenz no admiten órbitas cuasiperiódicas (éstas descansan en la superficie de un toro y el toro es un volumen que entonces debería ser invariante bajo la acción del flujo) ni tiene puntos fijos u órbitas cerradas repulsoras. Por lo tanto, por eliminación, todos los puntos fijos han de ser sumideros o sillas y las órbitas cerradas, si existen, deben ser estables o tipo silla.

Si consideramos la función $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $L(x, y, z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2$ tenemos que para toda curva solución $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ la función $\psi(t) = L \circ \varphi(t)$ satisface que $\psi'(t) = -2\sigma [rx^2(t) + y^2(t) + bz^2(t) - 2rbz(t)] < 0$. Esto es, para valores grandes de z , L es una función de Lyapunov para el flujo. Así, obtenemos

que para valores grandes de C el elipsoide $L(x, y, z) = C$ es transversal al flujo y este apunta hacia el interior del mismo, mostrando que $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : L(x, y, z) < C\}$ es un bloque aislante para el conjunto maximal invariante $\Lambda = \Lambda_{\sigma, b, r}$ dado por:

$$\Lambda = \bigcap_{t > 0} X_t(U)$$

donde X_t representa el flujo generado por el campo de vectores $X(x, y, z) = (\sigma y - \sigma x, rx - y - xz, -bz + xy)$. Además es fácil ver que $Vol(\Lambda) = 0$. En efecto tenemos que para cada $t > 0$, $Vol(\Lambda) < Vol(X_t(U))$. De acuerdo a la formula de Liouville, si $\phi(t)$ es una matriz fundamental de $\dot{x} = A(t)x$ entonces $det\phi(t) = \phi(0)exp(\int_0^t Traza(A(s)ds))$, por lo tanto tenemos que:

$$Vol(X_t(U)) = \int_U det(DX_t(p))dp.$$

y como

$$det(DX_t(p)) = exp(-(\int_0^t div(DX_\tau(p))d\tau)) = exp(-(\sigma + b + 1)t)$$

finalmente obtenemos que

$$Vol(X_t(U)) = exp(-(\sigma + b + 1)t) \cdot Vol(U),$$

mostrando lo afirmado.

En resumen, se ha demostrado que las ecuaciones de Lorenz presentan un conjunto attracting al que toda órbita del sistemas tiende asintóticamente. Que este conjunto es de medida nula y que contiene la singularidad $(0, 0, 0)$. Existen otras propiedades que hacen de este conjunto attracting un objeto dinámico extremadamente interesante de estudiar, pero que son de muy difícil abordaje como lo es demostrar que este conjunto es efectivamente un conjunto atractor C^1 robusto que contiene a la singularidad $(0, 0, 0)$.

3.1.4. Puntos de equilibrio

El origen $(0, 0, 0)$ es un punto de equilibrio para todos los valores de los parámetros. Si $0 < r < 1$, conocemos que es estable y globalmente attracting. En $r = 1$ existe una bifurcación simple y para $r > 1$ existen otros dos puntos de equilibrio que llamaremos C_1 y C_2 , los cuales son $(\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$. El flujo cerca de el origen se muestra en la Figura 3.2.

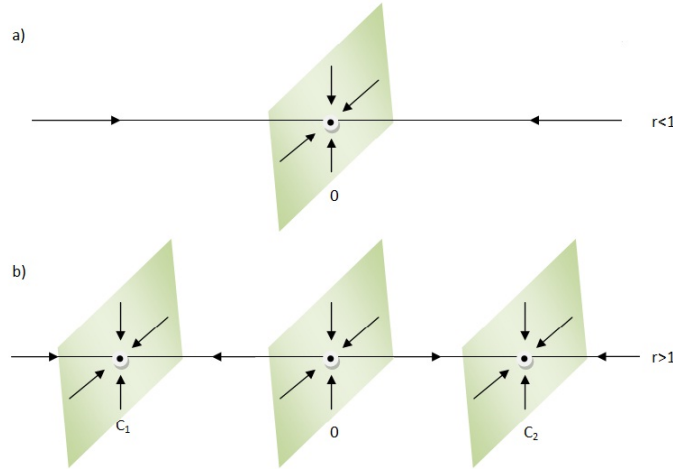


Figura 3.2: Vista esquemática del flujo cerca del origen para r cerca a uno.

Para $r > 1$ el origen es no estable. Al linealizar el flujo cerca al origen, encontramos tres valores propios:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2} \left\{ -\sigma - 1 \pm ((\sigma - 1)^2 + 4\sigma r)^{\frac{1}{2}} \right\} \text{ y } \lambda_3 = -b$$

λ_2 y λ_3 son negativos, λ_1 es positivo. Tenemos $-\lambda_2 > \lambda_1 > -\lambda_3$ y la condición $r > 1 + [b(\sigma + 1 + b)/\sigma]$. Para $\sigma = 10$ y $b = 8/3$ esta condición es aproximadamente $r > 4,644$.

Los valores propios del flujo linealizado en C_1 y C_2 son las raíces de la ecuación $a^3 + a^2(\sigma + b + 1) + ab(\sigma + r) + 2\sigma b(r - 1) = 0$. La condición para que todas las tres raíces sean reales es complicada y no es importante. Es suficiente decir que las tres raíces tiene valor real cuando r está cercano a uno. Cuando $\sigma = 10$ y $b = 8/3$

tenemos una raíz real y un par de raíces conjugadas complejas siempre que $r > 1,346$, ver Figura 3.3a). Si r crece más, las espirales se hacen cada vez más anchas, de modo que cuando $r \approx 13,96$ (experimentos numéricos) las espirales son tan grandes que tocan la variedad estable del origen convirtiéndose en un punto homoclínico (existe una órbita que nace y muere en el origen). Ver Figura 3.3 b). Lo importante es que si $r < [\sigma(\sigma + b + 3)/(\sigma - b - 1)]$, las tres raíces tienen parte real negativa. Esto implica que cuando $\sigma = 10$ y $b = 8/3$, los puntos de equilibrio C_1 y C_2 son estables en el parámetro de rango $1 < r < 470/19 \approx 24,74$.

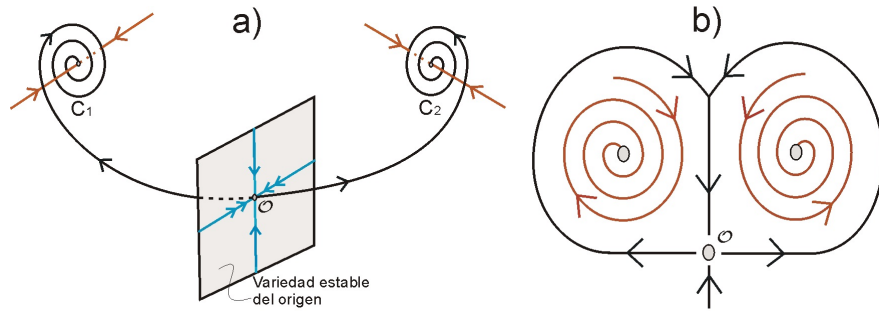
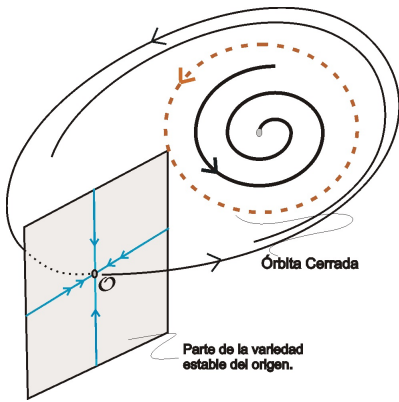


Figura 3.3: a) Al hacer crecer r , C_1 y C_2 desarrollan dos autovalores complejos conjugados. b) Cuando $r \approx 13,926$ tenemos un punto homoclínico en el origen.

Llamaremos el valor crítico de $r = 24,74$ como r_H . Cuando $r > r_H$, las raíces complejas de la ecuación anterior tienen parte real positiva y C_1 y C_2 son no estables. La raíz real es negativa para todo r .



En $r = r_H$, los valores propios complejos cruzan el eje imaginario, las dos órbitas (o ciclos) con periodos infinito comenzando y terminando en el origen, atraviesan la variedad estable del origen y se forman órbitas periódicas cerradas cerca de los atractores C_1 y C_2 , esta última bifurcación se conoce que es de tipo Hopf, en la cual los puntos C_1 y C_2 pierden su estabilidad.

La teoría sobre la bifurcación de Hopf es ahora avanzada y podremos conocer dos tipos. La bifurcación es **supercrítica** si cada punto pierde su estabilidad al ser

expulsado de una órbita periódica estable y la bifurcación es **subcrítica** si cada punto pierde su estabilidad al ser absorbido por una órbita periódica no estable. Es probable que la bifurcación sea subcrítica para todo σ y b valores para los cuales la bifurcación ocurre en $r > 0$. El flujo cerca de C_1 para r cerca a r_H se muestra en la Figura 3.4. La bifurcación de Hopf en el sistema Lorenz se desarrollará posteriormente con más detalle.

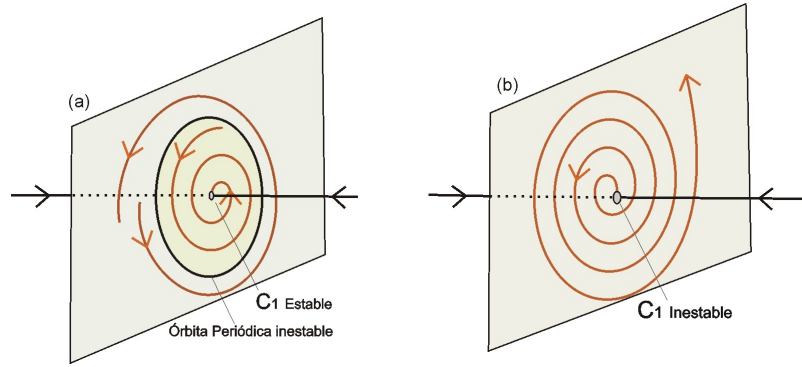


Figura 3.4: Una vista esquemática del flujo cerca de C_1 para r cerca de r_H . a) $r < r_H$, b) $r > r_H$.

Si continuamos aumentando r , cada rama de la variedad inestable del origen es eventualmente atraída al punto de equilibrio opuesto. Ver Figura 3.5.

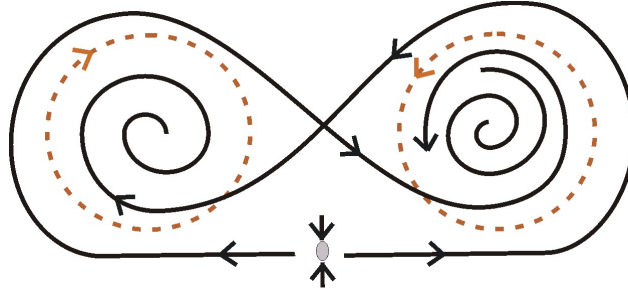


Figura 3.5: Cada rama de la variedad inestable es eventualmente atraída al punto de equilibrio opuesto.

3.1.5. Resumen

Resumiendo los resultados de la sección anterior.

- $0 < r < 1$: El origen es globalmente estable (todas las trayectorias van a él y no hay ni ciclos límites ni caos)
- $1 < r$: El origen es no estable (es un punto silla). El flujo linealizado alrededor de el origen tiene dos valores propios negativos y uno positivo.
- $1 < r < 24,74$: C_1 y C_2 son estables. Todos los tres autovalores de el flujo, linealizados sobre C_1 y C_2 , tienen parte real negativa. Proporcionando $r > 1,346$ ($\sigma = 10$ y $b = \frac{8}{3}$) existe un par de autovalores conjugados complejos.
- $24,74 < r$: C_1 y C_2 son no estables. El flujo linealizado sobre C_1 y C_2 , tiene un autovalor real negativo y un par de autovalores conjugados complejos con parte real positiva. Note que para $r > 24,74$ todos los tres puntos estacionarios son no estables.

Capítulo 4

Bifurcación de Hopf

El siguiente capítulo se desarrolló teniendo en cuenta los trabajos en [BC] sobre la bifurcación de Hopf en sistemas tipo Lorenz y de Kuznetsov en [K] sobre la aplicación de la variedad central en sistemas n -dimensionales.

Definición 5 *Considere el sistema*

$$\dot{x} = f(x, \mu) = f_\mu(x) \tag{4.1}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y $\mu \in \mathbb{R}$.

El punto x_0 en $\mu = \mu_0$ se dice punto de equilibrio no-hiperbólico de (4.1) si:

A) $f(x_0, \mu_0) = 0$

B) $D_x(f(x_0, \mu_0))$ posee al menos un valor propio con parte real igual a cero.

4.1. Teorema de la variedad central

El teorema de la variedad central se restringirá al caso en que la parte hiperbólica es atractora.

Considere el sistema autónomo que tiene en el origen un equilibrio no hiperbólico,

$$\dot{x} = F(x)$$

$x \in \mathbb{R}^n$ y $F \in C^r$, tal que

$$F(0) = 0 \text{ y } DF(0) \sim \begin{pmatrix} A_{n_1 \times n_1} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}_{n \times n}$$

donde A sólo posee valores propios con parte real cero y B sólo posee valores propios con parte real negativa. El símbolo " \sim " denota similitud entre matrices. Podemos pensar que este sistema se obtiene del sistema (4.1) que depende del parámetro μ , y que la función $F = f_0$, donde $x_0 = 0$ es un equilibrio no hiperbólico de f para $\mu = 0$. Mediante un cambio de coordenadas podemos descomponer la dinámica de F en dos bloques de Jordan

$$\begin{cases} \dot{u} = Au + f(u, v) \\ \dot{v} = Bv + g(u, v) \end{cases} \quad (4.2)$$

Sea T^c el subespacio lineal maximal invariante por A , tal que A restricto a T^c tiene todos sus valores propios con parte real cero. La dimensión de T^c es n_1 .

Teorema 1 (Variedad Central) *Considere el sistema (4.2)*

- (i) *Existe una variedad invariante por (4.2) tangente en 0 a T^c , llamada variedad central, definida alrededor de $x_0 = 0$ por*

$$W^c(0) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \mid v = h(u)\},$$

- (ii) *El sistema (4.2) es localmente topológicamente equivalente cerca del origen al sistema*

$$\begin{cases} \dot{u} = Au + f(u, h(u)) \\ \dot{v} = Bv \end{cases}$$

donde $\dot{u} = Au + f(u, h(u))$ es la restricción de la dinámica de la primera ecuación de (4.2) sobre la variedad central,

(iii) La función $h : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-n_1}$ puede ser aproximada utilizando la ecuación

$$Dh(u) [Au + f(u, h(u))] - Bh(u) - g(u, h(u)) = 0$$

Demostración. Ver [K], capítulo 5. ■

Recordemos que dos sistemas son *localmente topológicamente equivalentes*, si existen vecindades, y un homeomorfismo entre esas vecindades que envía órbitas de un sistema en órbitas del segundo sistema, conservando la dirección del tiempo.

La variedad central no necesariamente es única, Ver ejemplos en [K], tercera edición, Pág. 159.

4.2. Teorema de la bifurcación de Hopf

La bifurcación de Hopf, es un tipo de bifurcación por pérdida de hiperbolicidad en los puntos de equilibrio que presentan algunos sistemas, de tal manera que al variar el valor del parámetro de bifurcación del sistema, este sufre un cambio en la estabilidad del punto de equilibrio en estudio, dando origen o desapareciendo una órbita periódica, la cual tienen una determinada estabilidad. Dicha estabilidad es proporcionada por el signo del *primer coeficiente de Lyapunov* $l_1 = l_1(\mu)$ que se define más adelante.

Teorema 2 (Bifurcación de Hopf) *Considere el sistema parametrizado*

$$\dot{x} = f(x, \mu)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y $\mu \in \mathbb{R}$. Supongamos que existe $(0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tal que

$$(H1) \quad f(0, 0) = 0,$$

$$(H2) \quad D_x f(0, 0) \text{ posee un único par de valores propios en el eje imaginario y el resto están fuera de él,}$$

$$(H3) \quad \frac{d}{d\mu}(\operatorname{Re}(\lambda(\mu)))|_{\mu=0} = d \neq 0, \text{ donde } \lambda(\mu) \text{ es un valor propio de } D_x f(0, \mu), \text{ y}$$

(H4) $l_1(0) \neq 0$.

Entonces existe una única variedad central bidimensional que pasa por $(0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, la cual es tangente al espacio propio generado por los vectores propios asociados a $\lambda(0)$ y $\bar{\lambda}(0)$. La dinámica del sistema es localmente topológicamente equivalente al producto de una contracción (valores propios con parte real negativa) por la dinámica restringida sobre la variedad central.

Demostración. Ver [K]. ■

Cuando $n = 2$, la variedad central es el plano, y la dinámica sobre esta variedad central (vía conjugación topológica local = cambio de coordenadas y parámetros) viene dada en coordenadas complejas por

$$\dot{z} = (\alpha + i)z + \text{signo}[l_1(0)]z|z|^2$$

donde α es un nuevo parámetro.

Si $l_1 < 0$ la órbita periódica que aparece en la bifurcación es estable (caso supercrítico), mientras si $l_1 > 0$ es inestable (caso subcrítico).

Existen fórmulas para calcular el primer exponente de Lyapunov en $\mu = 0$, y su dificultad depende de la dimensión n del espacio. Más adelante, cuando estudiemos la bifurcación de Hopf para el sistema de Lorenz, daremos una fórmula para calcular este exponente en \mathbb{R}^3 .

La bifurcación de Hopf supercrítica se presenta cuando $l_1 < 0$. Se caracteriza por el nacimiento o desvanecimiento de una órbita periódica atractora, al momento de variar el parámetro de bifurcación alrededor de $\mu_0 = 0$. La Figura 4.1 muestra el diagrama de bifurcación para este caso.

La bifurcación de Hopf subcrítica, se presenta cuando $l_1 > 0$. Se caracteriza por el nacimiento o desvanecimiento de una órbita periódica repulsora, al momento de variar el parámetro de bifurcación alrededor de $\mu_0 = 0$. La Figura 4.2, muestra el diagrama de bifurcación para este caso.

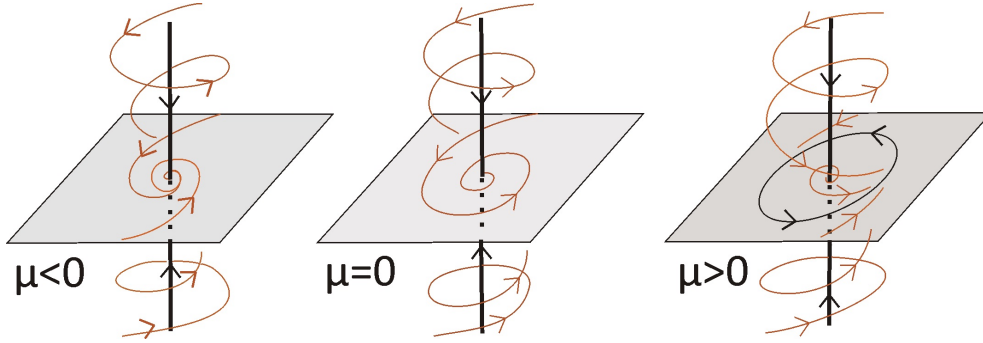


Figura 4.1: Bifurcación de Hopf supercrítica en \mathbb{R}^3 . Un punto de equilibrio estable se hace inestable, dando origen a una órbita periódica atractora.

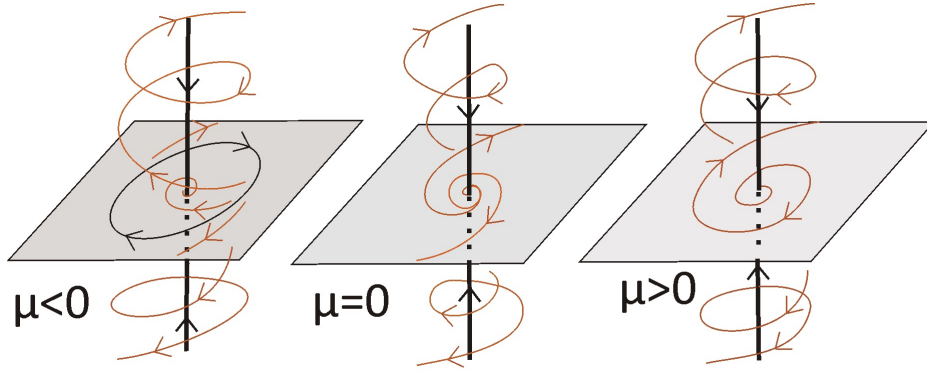


Figura 4.2: Bifurcación de Hopf Subcrítica en \mathbb{R}^3 : Un equilibrio estable y una órbita periódica inestable se funden en un punto de equilibrio inestable.

4.3. Colocación de raíces en el eje imaginario

Considere la ecuación cúbica

$$\lambda^3 + L_1(\mu)\lambda^2 + L_2(\mu)\lambda + L_3(\mu) = 0,$$

donde se observa que los coeficientes dependen del parámetro real μ . Deseamos encontrar valores del parámetro μ para que la ecuación cúbica posea un par de raíces imaginarias y una real negativa.

Sea $\lambda = i\omega_0$ una solución imaginaria, entonces la ecuación cúbica es equivalente a

$$\begin{aligned}(i\omega_0)^3 + L_1(\mu)(i\omega_0)^2 + L_2(\mu)(i\omega_0) + L_3(\mu) &= 0 \\ (-i\omega_0)^3 - L_1(\mu)\omega_0^2 + iL_2(\mu)\omega_0 + L_3(\mu) &= 0 \\ (i\omega_0)(L_2(\mu) - \omega_0^2) + (L_3(\mu) - L_1(\mu)\omega_0^2) &= 0\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}L_2(\mu) - \omega_0^2 &= 0 \\ L_3(\mu) - L_1(\mu)\omega_0^2 &= 0,\end{aligned}$$

es decir,

$$L_2(\mu) = \omega_0^2 = \frac{L_3(\mu)}{L_1(\mu)}.$$

Tenemos entonces que la ecuación cúbica posee un par de raíces imaginarias, si existe μ tal que

$$L_3(\mu) = L_1(\mu)L_2(\mu) \text{ y } L_2(\mu) > 0 \quad (4.3)$$

Sea $\mu = \mu_0$ tal que se satisface (4.3), y sean $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ y $\lambda_3 = \lambda_0$ las raíces de la cúbica. Es claro que

$$\omega_0 = \sqrt{L_2(\mu_0)}, \quad (4.4)$$

además, se debe cumplir que

$$\begin{aligned}(\lambda - i\omega_0)(\lambda + i\omega_0)(\lambda - \lambda_0) &= 0 \\ \lambda^3 - \lambda_0\lambda^2 + \omega_0^2\lambda + (-\lambda_0\omega_0^2) &= 0,\end{aligned}$$

por lo que

$$\lambda_0 = -\frac{L_3(\mu_0)}{L_2(\mu_0)} \quad (4.5)$$

4.4. Velocidad de cruce de los valores propios a través del eje imaginario

Para garantizar que ocurra la bifurcación de Hopf, además de tener un valor del parámetro que coloque dos valores propios en el eje imaginario, también se debe verificar si dichos valores propios atraviesan a éste, es decir, si la velocidad de cruce, dada por

$$\alpha'(\mu_0) = \frac{d}{d\mu} [Re(\lambda(\mu))] |_{\mu=\mu_0}$$

es diferente de cero.

El desarrollo que a continuación se presenta es con el que determinamos la velocidad de cruce para cualquier sistema en \mathbb{R}^3 , la cual estará dada en términos de la derivada del campo. Considere el siguiente sistema:

$$\dot{x} = f(x, \mu)$$

Supongamos que existe x_0 y μ_0 tal que

$$f(x_0, \mu_0) = 0,$$

y supongamos también que

$$Df(x_0, \mu_0) \sim \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

con $\lambda_0 < 0$ y $\omega_0 > 0$. Supongamos que para $\mu \approx \mu_0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha(\mu) + i\beta(\mu) \\ \lambda_2 &= \alpha(\mu) - i\beta(\mu) \end{aligned}$$

con $\alpha(\mu_0) = 0$ y $\beta(\mu_0) = \omega_0$

No perdamos de vista que deseamos calcular $\alpha'(\mu_0)$, que es la velocidad de cruce de los valores propios $\lambda_{1,2}$ por el eje imaginario. Observemos que para $\mu \approx \mu_0$ el polinomio característico asociado a la matriz jacobiana

$$A = Df(x_0, \mu) \sim \begin{pmatrix} \alpha(\mu) & -\beta(\mu) & 0 \\ -\beta(\mu) & \alpha(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^*(\mu) \end{pmatrix} = J_\mu$$

está dado por

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - J_\mu) = \lambda^3 + L_1(\mu)\lambda^2 + L_2(\mu)\lambda + L_3(\mu)$$

ya que matrices similares poseen el mismo polinomio característico, donde

$$L_1(\mu) = -(2\alpha(\mu) + \lambda^*(\mu)) \quad (4.6)$$

$$L_2(\mu) = 2\alpha(\mu)\lambda^*(\mu) + \alpha^2(\mu) + \beta^2(\mu) \quad (4.7)$$

$$L_3(\mu) = -\lambda^*(\mu)(\alpha^2(\mu) + \beta^2(\mu)) \quad (4.8)$$

Como podemos observar, tenemos un sistema de tres ecuaciones, resolviéndolo para α tenemos, de (4.17) que

$$\alpha^2(\mu) + \beta^2(\mu) = -\frac{L_3(\mu)}{\lambda^*(\mu)}.$$

sustituyendo la ecuación anterior en (4.7), tenemos

$$L_2(\mu) = 2\alpha(\mu)\lambda^*(\mu) - \frac{L_3(\mu)}{\lambda^*(\mu)} \quad (4.9)$$

Despejamos $\lambda^*(\mu)$ de (4.6) y sustituyendo en (4.18) tenemos

$$\lambda^*(\mu) = -2\alpha(\mu) - L_1(\mu)$$

entonces

$$L_2(\mu) = -2\alpha(\mu)(2\alpha(\mu) + L_1(\mu)) + \frac{L_3(\mu)}{2\alpha(\mu) + L_1(\mu)}$$

lo cual implica que

$$L_2(\mu)(2\alpha(\mu) + L_1(\mu)) = -2\alpha(\mu)(2\alpha(\mu) + L_1(\mu))^2 + L_3(\mu)$$

de aquí se sigue que

$$2\alpha(\mu) [(2\alpha(\mu) + L_1(\mu))^2 + L_2(\mu)(2\alpha(\mu) + L_1(\mu))] - L_3(\mu) = 0$$

Desarrollando la expresión anterior tenemos

$$2\alpha(\mu)(4\alpha^2(\mu) + 4\alpha(\mu)L_1(\mu) + L_1^2(\mu)) + L_2(\mu)(2\alpha(\mu) + L_1(\mu)) - L_3(\mu) = 0$$

entonces

$$8\alpha^3(\mu) + 8\alpha^2(\mu)L_1(\mu) + (2L_1^2(\mu) + 2L_2(\mu))\alpha(\mu) + L_1(\mu)L_2(\mu) - L_3(\mu) = 0$$

derivando implícitamente la expresión, tenemos:

$$\begin{aligned} 0 = & 24\alpha^2(\mu)\alpha'(\mu) + 8 [L_1(\mu)(2\alpha(\mu))\alpha'(\mu) + \alpha^2(\mu)L_1'(\mu)] \\ & + 2 [(L_1^2(\mu) + L_2(\mu))\alpha'(\mu) + \alpha(\mu)(2L_1(\mu)L_1'(\mu) + L_2'(\mu))] \\ & + L_1(\mu)L_2'(\mu) + L_1'(\mu)L_2(\mu) - L_3'(\mu) \end{aligned}$$

Ahora, si $\mu = \mu_0$, entonces

$$2(L_1^2(\mu_0) + L_2(\mu_0))\alpha'(\mu_0) = L_3'(\mu_0) - L_1'(\mu_0)L_2(\mu_0) - L_1(\mu_0)L_2'(\mu_0)$$

y por último despejando $\alpha'(\mu_0)$ tenemos

$$\alpha'(\mu_0) = \frac{L'_3(\mu_0) - L'_1(\mu_0)L_2(\mu_0) - L_1(\mu_0)L'_2(\mu_0)}{2(L_1^2(\mu_0) + L_2(\mu_0))}$$

pero, $L_1(\mu_0) = -\lambda_0$ y $L_2(\mu_0) = \omega_0^2$, entonces

$$\alpha'(\mu_0) = \frac{L'_3(\mu_0) - \omega_0^2 L'_1(\mu_0) + \lambda_0 L'_2(\mu_0)}{2(\lambda_0^2 + \omega_0^2)} \quad (4.10)$$

siendo esta última ecuación la velocidad de cruce de los valores propios a través del eje imaginario.

4.5. Bifurcación de Hopf en el sistema Lorenz

En el trabajo que a continuación se presenta, se hace un análisis paramétrico de la bifurcación de Hopf, buscando la posibilidad de manipular el valor de los parámetros de control para determinar la estabilidad de las órbitas periódicas que aparecen o desaparecen, según sea el caso. Consideraremos r como parámetro de bifurcación, σ y b como parámetros de control. La idea es hacer una clasificación de acuerdo a los parámetros de control, de los tipos de bifurcación de Hopf que pueden ocurrir: crítica y subcrítica.

4.5.1. Sea $r=\mu$, parámetro de bifurcación y (σ, b) parámetros de control

Bajo estas condiciones, el sistema de Lorenz queda:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma y - \sigma x \\ \dot{y} &= \mu x - xz - y \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}$$

El primer paso al analizar las ecuaciones de Lorenz es localizar los puntos de equilibrio al resolver el sistema algebraico:

$$\begin{aligned}
0 &= \sigma y - \sigma x \\
0 &= \mu x - xz - y \\
0 &= xy - bz
\end{aligned}$$

De la primera ecuación, se tiene $y = x$. A continuación, si se sustituye y por x en las ecuaciones segunda y tercera, se obtiene:

$$x(\mu - 1 - z) = 0 \quad (4.11)$$

$$-bz + x^2 = 0 \quad (4.12)$$

Una manera de satisfacer la ecuación (4.11) es elegir $x = 0$. Entonces se deduce que $y = 0$ y de la ecuación (4.12), $z = 0$. De modo alternativo, es posible satisfacer (4.11), si se elige $z = \mu - 1$. Entonces (4.12) requiere que $x = \pm\sqrt{b(\mu - 1)}$ y en consecuencia $y = \pm\sqrt{b(\mu - 1)}$. Observe que estas expresiones para x y y son reales sólo cuando $\mu \geq 1$. Por tanto los puntos de equilibrio para este sistema son:

$$\begin{aligned}
O &= (0, 0, 0) \\
C_1 &= (\sqrt{b(\mu - 1)}, \sqrt{b(\mu - 1)}, \mu - 1), \\
C_2 &= (-\sqrt{b(\mu - 1)}, -\sqrt{b(\mu - 1)}, \mu - 1)
\end{aligned}$$

Análisis de estabilidad en puntos de equilibrio no-hiperbólicos.

Analizaremos los puntos en los cuales, la matriz jacobiana del sistema presenta un par de valores propios con parte real cero y otro valor propio real. La matriz jacobiana asociada al sistema (*Sistema Lorenz*) es:

$$A(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \mu - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

Análisis en el punto de equilibrio $O = (0, 0, 0)$.

Iniciemos nuestro análisis en el origen. La matriz jacobiana evaluada en este punto de equilibrio es:

$$A(O) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \mu & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

donde sus valores propios son:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= -b \\ \lambda_1 &= \frac{1}{2}(-1 - \sigma + \sqrt{1 - 2\sigma + \sigma^2 + 4\sigma\mu}) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}(-1 - \sigma - \sqrt{1 - 2\sigma + \sigma^2 + 4\sigma\mu}) \end{aligned}$$

Como podemos observar, lo primero que debemos de hacer para conseguir colocar los valores propios en el eje imaginario es que $-1 - \sigma = 0$. Es decir, $\sigma = -1$, pero como estamos considerando que todos los parámetros son positivos, entonces concluimos que en el origen no ocurre una bifurcación de Hopf.

Análisis en el punto de equilibrio $C_1 = (\sqrt{b(\mu - 1)}, \sqrt{b(\mu - 1)}, \mu - 1)$.

Veamos ahora que ocurre en C_1 . Primeramente veremos que condiciones deben cumplir los parámetros de control para que $C_1 \in \mathbb{R}^3$. Como se puede observar, para que $C_1 \in \mathbb{R}^3$, necesitamos que $\mu - 1 > 0$. La jacobiana evaluada en éste punto de equilibrio es:

$$A(C_1) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(\mu - 1)} \\ \sqrt{b(\mu - 1)} & \sqrt{b(\mu - 1)} & -b \end{pmatrix}$$

Así, el polinomio característico asociado a la matriz jacobiana es de la forma: $P_A(\lambda) = \det(I - A(C_1))$, de donde

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + (b\mu + \sigma b)\lambda + 2\sigma b(\mu - 1) = 0$$

Deseamos encontrar valores del parámetro μ para que la ecuación cúbica posea un par de raíces imaginarias y una real negativa. Por tanto, de la ecuación (4.3) la ecuación cúbica posee un par de raíces imaginarias, si existe μ tal que:

$$2\sigma b(\mu - 1) = (\sigma + b + 1)(b\mu + \sigma b), \text{ de donde } \mu = \frac{3\sigma + \sigma^2 + \sigma b}{\sigma - b - 1}$$

Por otro lado necesitamos que este valor de $\mu > 0$, entonces:

$$(i) \frac{3\sigma + \sigma^2 + \sigma b}{\sigma - b - 1} > 0 \Rightarrow \sigma - b - 1 > 0 \Rightarrow \sigma > b + 1.$$

Ahora, como necesitamos que $\mu > 1$ para que $C_1 \in \mathbb{R}^3$, se observa que

$$(ii) \frac{3\sigma + \sigma^2 + \sigma b}{\sigma - b - 1} > 1 \Rightarrow 3\sigma + \sigma^2 + \sigma b > \sigma - b - 1 \Rightarrow \sigma^2 + 2\sigma + 1 + b(\sigma + 1) > 0$$

y se ve claramente que la última desigualdad se cumple para todo $\sigma, b \in \mathbb{R}$, en particular para $\sigma > b + 1$; por lo que, basta con que $\sigma > b + 1$ para que $C_1 \in \mathbb{R}^3$ y para que $\mu_0 > 0$ (ver Figura 4.3).

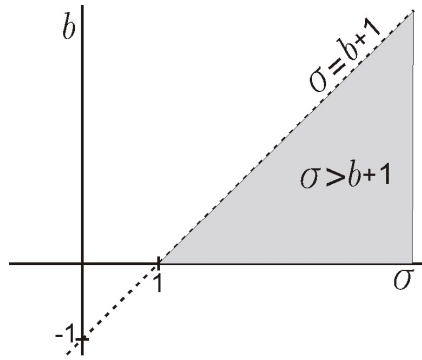


Figura 4.3: Región donde $C_1 \in \mathbb{R}^3$ y $\mu_0 > 0$.

Y para el valor del parámetro de bifurcación $\mu = \mu_0$, los valores propios de la matriz jacobiana, dado a (4.4) y (4.5) son:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= -(\sigma + b + 1) \\ \lambda_1 &= i \frac{\sqrt{2}\sqrt{\sigma(\sigma+1)}b}{\sqrt{\sigma-b-1}} \\ \lambda_2 &= -i \frac{\sqrt{2}\sqrt{\sigma(\sigma+1)}b}{\sqrt{\sigma-b-1}}\end{aligned}$$

Habiendo conseguido ya los valores propios deseados, nos falta analizar si la velocidad de cruce de estos a través del eje imaginario es diferente de cero. Aplicando la fórmula para la velocidad de cruce (4.10), dada por

$$\alpha'(\mu_0) = [L'_3(\mu_0) - \omega_0^2 L'_1(\mu_0) + \lambda_0 L'_2(\mu_0)]/2(\lambda_0^2 + \omega_0^2),$$

con

$$\begin{aligned}L_1(\mu) &= \sigma + b + 1 \\ L_2(\mu) &= b\mu + \sigma b \\ L_3(\mu) &= 2\sigma b\mu - 2\sigma b\end{aligned}$$

obtenemos que

$$\alpha'(\mu_0) = [2\sigma b + (-1 - \sigma - b)b]/[2(-1 - \sigma - b)^2 + 4(\sigma b + \sigma^2 b)/(\sigma - b - 1)]$$

Buscaremos la posibilidad de que la derivada sea igual a cero. Para esto se tiene que

$$\alpha'(\mu_0) = 0 \Rightarrow 2\sigma b + (-1 - \sigma - b)b = 0 \Rightarrow \sigma = b + 1$$

Observemos que la velocidad de cruce es diferente de cero para los valores de los parámetros de control dentro de la región factible. Además, podemos observar que dentro de ésta, la velocidad de cruce es positiva. Por lo tanto, podemos asegurar que en la región de factibilidad sí ocurre una bifurcación de Hopf.

4.5.2. Cálculo de la variedad central, (coeficiente de Lyapunov)

El coeficiente de Lyapunov se hallará de acuerdo a la orientación dada por [K] en su capítulo 5, donde es posible encontrar toda la teoría que respaldan dicho proceso.

Hemos visto que el sistema Lorenz exhibe una bifurcación de Hopf al fijar los parámetros σ, b y r , donde $r = \frac{3\sigma + \sigma^2 + \sigma b}{\sigma - b - 1}$. Nos preguntamos ahora, ¿qué clase de bifurcación (crítica o subcrítica) presenta el sistema? para ello, debemos hallar el coeficiente de Lyapunov aplicando el teorema de la variedad central, como se muestra a continuación.

$$\dot{x} = \sigma(y - x) \quad (4.13)$$

$$\dot{y} = rx - y - xz \quad (4.14)$$

$$\dot{z} = -bz + xy \quad (4.15)$$

de (4.13) obtenemos $y = \frac{\dot{x} + \sigma x}{\sigma} (*)$.

Reemplazando (*) en (4.14) se obtiene: $\frac{\ddot{x} + (\sigma + 1)\dot{x} + \sigma(1 - r)x}{\sigma} = -xz \quad (**)$

De (**) se obtiene: $-z = \frac{\ddot{x} + (\sigma + 1)\dot{x} + \sigma(1 - r)x}{\sigma x}$

Derivando (**) se llega a: $\frac{\ddot{x} + (\sigma + 1)\ddot{x} + \sigma(1 - r)\dot{x}}{\sigma} = -\dot{x}z - x\dot{z}$, pero

$$\begin{aligned} -\dot{x}z - x\dot{z} &= \dot{x} \left[\frac{\ddot{x} + (\sigma + 1)\dot{x} + \sigma(1 - r)x}{\sigma x} \right] - x \left[xy - bz \right] = \\ &= \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\dot{x}\ddot{x}}{x} + \frac{(\sigma + 1)\dot{x}^2}{x} + \sigma(1 - r)\dot{x} \right] - x \left[x \left(\frac{\dot{x} + \sigma x}{\sigma} \right) + b \left(\frac{\ddot{x} + (\sigma + 1)\dot{x} + \sigma(1 - r)x}{\sigma x} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\dot{x}\ddot{x}}{x} + \frac{\sigma + 1}{x} \dot{x}^2 + \sigma(1 - r)\dot{x} - x^2\dot{x} - \sigma x^3 - b\ddot{x} - b(\sigma + 1)\dot{x} - b\sigma(1 - r)x \right] \end{aligned}$$

Así, igualando y eliminando σ del denominador:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (\sigma + 1)\ddot{x} + \sigma(1 - r) &= \\ \frac{\dot{x}\ddot{x}}{x} + \frac{(\sigma + 1)\dot{x}^2}{x} &+ \dot{x} + \sigma(1 - r)\dot{x} - x^2\dot{x} - \sigma x^3 + b\ddot{x} + b(1 + \sigma)\dot{x} + b\sigma(1 - r)x \end{aligned}$$

Por lo tanto, el sistema Lorenz puede ser expresado como una ecuación simple de tercer orden, así:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (\sigma + b + 1)\ddot{x} + b(1 + \sigma)\dot{x} + b\sigma(1 - r)x \\ = \frac{(1 + \sigma)\dot{x}^2}{x} + \frac{\dot{x}\ddot{x}}{x} - x^2\dot{x} - \sigma x^3 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Trasladando el punto de equilibrio al origen, con la nueva coordenada $\xi = x - x_0$ donde $x_0 = \sqrt{b(r - 1)}$, tenemos que: $\dot{\xi} = \dot{x}$, $\ddot{\xi} = \ddot{x}$, $\ddot{\xi} = \ddot{x}$, sustituyendo en (4.16) se tiene:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + (\sigma + b + 1)\ddot{\xi} + b(1 + \sigma)\dot{\xi} + b\sigma(1 - r)(\xi + x_0) \\ = \frac{(1 + \sigma)\dot{\xi}^2}{\xi + x_0} + \frac{\dot{\xi}\ddot{\xi}}{\xi + x_0} - (\xi + x_0)^2\dot{\xi} - \sigma(\xi + x_0)^3 \end{aligned} \quad (4.17)$$

de donde:

- (i) $-(\xi + x_0)^2\dot{\xi} = -\xi^2\dot{\xi} - 2x_0\xi\dot{\xi} - x_0^2\dot{\xi}$
- (ii) $-\sigma(\xi + x_0)^3 = -\sigma\xi^3 - 3\sigma\xi^2x_0 - 3\sigma\xi x_0^2 - \sigma x_0^3$

Ahora, tomando ξ alrededor de $\xi = 0$, tenemos que su expansión de Taylor corresponde a:

$$\frac{1}{\xi + x_0} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0^2}\xi + \dots$$

y por tanto

$$(iii) \quad \frac{(1 + \sigma)\dot{\xi}^2}{\xi + x_0} = \frac{(1 + \sigma)\dot{\xi}^2}{x_0} - \frac{(1 + \sigma)\xi\dot{\xi}^2}{x_0^2} + \dots$$

$$(iv) \quad \frac{\dot{\xi}\ddot{\xi}}{\xi + x_0} = \frac{1}{x_0}\dot{\xi}\ddot{\xi} - \frac{1}{x_0^2}\xi\dot{\xi}\ddot{\xi} + \dots$$

Sustituyendo (i), (ii), (iii) y (iv) en (4.17)

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + (\sigma + b + 1)\ddot{\xi} + [b(1 + \sigma) + x_0^2]\dot{\xi} + [b\sigma(1 - r) + 3\sigma x_0^2]\xi \\ = -3\sigma\xi^2x_0 - 2x_0\xi\dot{\xi} + \frac{(1 + \sigma)\dot{\xi}^2}{x_0} + \frac{1}{x_0}\dot{\xi}\ddot{\xi} - \sigma\xi^3 - \xi^2\dot{\xi} - \frac{(1 + \sigma)}{x_0^2}\xi\dot{\xi}^2 - \frac{1}{x_0^2}\xi\dot{\xi}\ddot{\xi} + \dots \end{aligned}$$

Llamaremos

$$f(\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}) = -3\sigma\xi^2x_0 - 2x_0\xi\dot{\xi} + \frac{(1+\sigma)\dot{\xi}^2}{x_0} + \frac{1}{x_0}\dot{\xi}\ddot{\xi} - \sigma\xi^3 - \xi^2\dot{\xi} - \frac{(1+\sigma)}{x_0^2}\xi\dot{\xi}^2 - \frac{1}{x_0^2}\xi\dot{\xi}\ddot{\xi} + \dots$$

donde los puntos simbolizan los términos de orden superior.

Introduciendo $x_1 = \xi$, $x_2 = \dot{\xi}$, y $x_3 = \ddot{\xi}$, podemos reescribir la ecuación, como un sistema equivalente de tercer orden:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -c_0x_1 - c_1x_2 - c_2x_3 + f(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$

donde $c_0 = b\sigma(1-r) + 3\sigma x_0^2$, $c_1 = b(1+\sigma) + x_0^2$, y $c_2 = (\sigma + b + 1)$, el cual puede ser expresado como un sistema matricial de la forma: $\dot{U} = NU + F(U)$, $U = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$, así:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & -c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

con

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & -c_2 \end{pmatrix}, \quad F = (F_1, F_2, F_3) : F_1 = F_2 = 0 \text{ y } F_3 = f(x_1, x_2, x_3)$$

Analizaremos el punto de equilibrio en el origen, veamos que los valores propios del sistema son los mismos ya que solo hicimos una traslación.

$$|N - \lambda I| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ c_0 & c_1 & \lambda + c_2 \end{vmatrix} = \lambda[\lambda(\lambda + c_2) + c_1] + 1[c_0] = 0$$

así, $\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 = 0$, donde

$$c_0 = \sigma b(1-r) + 3\sigma x_0^2 = -\sigma b(r-1) + 3\sigma b(r-1) = 2\sigma b(r-1) = L_3(\mu),$$

$$c_1 = b(1 + \sigma) + x_0^2 = b(1 + \sigma + r - 1) = b(\sigma + r) = L_2(\mu)$$

$$c_2 = (\sigma + b + 1) = L_1(\mu)$$

corresponden a los coeficientes del polinomio característico de $A(C_1)$.

Cálculo de vectores propios

Para $\lambda = +i\omega_0$, tenemos que $[N - (i\omega_0)I]q = 0$, con $q = (v_1, v_2, v_3)^T$, es decir:

$$\begin{pmatrix} i\omega_0 & -1 & 0 \\ 0 & i\omega_0 & -1 \\ c_0 & c_1 & i\omega_0 + c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

así,

$$\begin{cases} i\omega_0 v_1 - v_2 = 0 \\ i\omega_0 v_2 - v_3 = 0 \\ c_0 v_1 + c_1 v_2 + (i\omega_0 + c_2)v_3 = 0 \end{cases}, \text{ entonces } \begin{cases} v_1 = \frac{1}{i\omega_0} v_2 \\ v_2 : \text{ es libre} \\ v_3 = i\omega_0 v_2 \end{cases}$$

es decir, si $\frac{c_0}{i\omega_0} v_2 + c_1 v_2 + (i\omega_0 + c_2)i\omega_0 v_2 = 0$, entonces $v_2 = 0$, o

$$\frac{c_0}{i\omega_0} + c_1 + (i\omega_0 + c_2)i\omega_0 = 0 \quad (4.18)$$

lo cual es cierto teniendo en cuenta que $r = \frac{3\sigma + \sigma^2 + \sigma b}{\sigma - b - 1}$ y:

$$c_0 = 2b\sigma \left[\frac{3\sigma + \sigma^2 + \sigma b}{\sigma - b - 1} - 1 \right] = 2b\sigma \left[\frac{3\sigma + \sigma^2 + \sigma b - \sigma + b + 1}{\sigma - b - 1} \right] = 2b\sigma \left[\frac{(\sigma + 1)^2 + b(\sigma + 1)}{\sigma - b - 1} \right] = 2b\sigma \left[\frac{(\sigma + 1)(b + \sigma + 1)}{\sigma - b - 1} \right]$$

$$\sigma + r = \left[\sigma + \frac{3\sigma + \sigma^2 + \sigma b}{\sigma - b - 1} \right] = \left[\frac{\sigma^2 - \sigma b - \sigma + 3\sigma + \sigma^2 + \sigma b}{\sigma - b - 1} \right] = \left[\frac{2\sigma^2 + 2\sigma}{\sigma - b - 1} \right] = \left[\frac{2\sigma(\sigma + 1)}{\sigma - b - 1} \right]$$

$$\omega_0 = \sqrt{b(\sigma + r)} = \sqrt{\frac{2b\sigma(\sigma + 1)}{\sigma - b - 1}}$$

sustituyendo en (4.18) tenemos:

$$\frac{-i}{\sqrt{\frac{2b\sigma(\sigma + 1)}{\sigma - b - 1}}} 2b\sigma \left[\frac{(\sigma + 1)(b + \sigma + 1)}{\sigma - b - 1} \right] + \left[\frac{2b\sigma(\sigma + 1)}{\sigma - b - 1} \right] - \frac{2b\sigma(\sigma + 1)}{\sigma - b - 1} + i(\sigma + b + 1) \sqrt{\frac{2b\sigma(\sigma + 1)}{\sigma - b - 1}} = 0$$

Por tanto el vector propio q de N , corresponde a:

$$q = (v_1, v_2, v_3)^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{i\omega_0}v_2 \\ v_2 \\ i\omega_0v_2 \end{pmatrix},$$

haciendo $v_2 = \omega_0$,

$$q = \begin{pmatrix} -i \\ \omega_0 \\ i\omega_0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \omega_0^2 \end{pmatrix} i$$

Ahora calcularemos el vector propio p de N^T , donde

$$N^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & -c_2 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = -i\omega_0$, tenemos que $[N^T - (-i\omega_0)I]p = 0$, con $p = (s_1, s_2, s_3)^T$, es decir:

$$\begin{pmatrix} i\omega_0 & 0 & -c_0 \\ 1 & i\omega_0 & -c_1 \\ 0 & 1 & i\omega_0 - c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

así,

$$\begin{cases} i\omega_0 s_1 - c_0 s_3 = 0 \\ s_1 - i\omega_0 s_2 - c_1 s_3 = 0 \\ s_2 + (i\omega_0 - c_2) s_3 = 0 \end{cases}, \text{ entonces } \begin{cases} s_1 = \frac{c_0}{i\omega_0} s_3 \\ s_2 = (-i\omega_0 + c_2) s_3 \\ s_3 : \text{ es libre} \end{cases}$$

Por tanto el vector propio p de N^T , corresponde a:

$$p = (s_1, s_2, s_3)^T = \begin{pmatrix} \frac{c_0}{i\omega_0} s_3 \\ (-i\omega_0 + c_2) s_3 \\ s_3 \end{pmatrix},$$

haciendo $s_3 = \omega_0$,

$$p = \begin{pmatrix} -c_0 i \\ -i\omega_0^2 + c_2\omega_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2\omega_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c_0 \\ -\omega_0^2 \\ 0 \end{pmatrix} i$$

Normalizando p respecto de q tal que $\langle p, q \rangle = 1$, donde $\langle p, q \rangle$ es el producto complejo dado por:

$$\langle p, q \rangle = \bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2 + \bar{p}_3 q_3$$

implica que los vectores propios correspondientes son:

$$q = \begin{pmatrix} -i \\ \omega_0 \\ i\omega_0^2 \end{pmatrix} \text{ y } p = \frac{1}{c_0 + c_2\omega_0^2 - 2i\omega_0^3} \begin{pmatrix} -c_0 i \\ -i\omega_0^2 + c_2\omega_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix}$$

Coefficiente de Lyapunov

Ahora procedemos a calcular el primer coeficiente de Lyapunov el cual se define como:

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0} \operatorname{Re} \left[\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - 2 \langle p, B(q, N^{-1}B(q, \bar{q})) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega_0 I_n - N)^{-1}B(q, q)) \rangle \right] \quad (4.19)$$

Sea $B = (B_1, B_2, B_3)$, $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $(x, y) \rightarrow B(x, y)$, una forma bilineal simétrica, definida por dos vectores $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ y $y = (y_1, y_2, y_3)^T \in \mathbb{R}^3$, que puede ser expresada como:

$$B_i(x, y) = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial^2 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\xi=0} x_j y_k, \quad i = 1, 2, 3.$$

$$B_1(x, y) = 0,$$

$$B_2(x, y) = 0,$$

$$B_3(x, y) = -6\sigma x_0 x_1 y_1 - 2x_0 x_2 y_1 - 2x_0 x_1 y_2 + \frac{2(1+\sigma)}{x_0} x_2 y_2 + \frac{1}{x_0} x_3 y_2 + \frac{1}{x_0} x_2 y_3$$

de donde

$$B(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_3(x, y) \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} B_3(q, q) &= [2br(4\sigma + 3\omega_0 i + 1) + 2b(\sigma - 2)(\sigma + \omega_0 i)] / x_0 \\ B_3(q, \bar{q}) &= [-4\sigma b(r - 2) + 2b(r + \sigma^2)] / x_0 \\ B_3(\bar{q}, \bar{q}) &= [2br(4\sigma + 1) - 2b\sigma(2 - \sigma) - 2i\omega_0^3] / x_0 \end{aligned}$$

Sea $C = (C_1, C_2, C_3)$, $C : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $(x, y, z) \rightarrow C(x, y, z)$, una forma trilineal, que puede ser expresada como

$$C_i(x, y, z) = \sum_{j,k,l=1}^3 \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\xi=0} x_j y_k z_l, \quad i = 1, 2, 3.$$

$$\begin{aligned} C_1(x, y, z) &= 0, \\ C_2(x, y, z) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3(x, y, z) &= -6\sigma(x_1 y_1 z_1) - 2(x_2 y_1 z_1) - 2(x_1 y_2 z_1) + \frac{2(1+\sigma)}{x_0^2}(x_2 y_2 z_1) + \frac{1}{x_0^2}(x_3 y_2 z_1) \\ &+ \frac{1}{x_0^2}(x_2 y_3 z_1) - 2(x_1 y_1 z_2) - \frac{2(1+\sigma)}{x_0^2}(x_2 y_1 z_2) - \frac{1}{x_0^2}(x_3 y_1 z_2) - \frac{2(1+\sigma)}{x_0^2}(x_1 y_2 z_2) \\ &- \frac{1}{x_0}(x_1 y_3 z_2) - \frac{1}{x_0^2}(x_2 y_1 z_3) - \frac{1}{x_0^2}(x_1 y_2 z_3) \end{aligned}$$

de donde

$$C(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_3(x, y, z) \end{pmatrix}$$

De aquí, $C_3(q, q, \bar{q}) = -6\sigma i + 6\omega_0 + \frac{2(1+\sigma)}{x_0^2} i \omega_0^2 - \frac{1}{x_0^2} \omega_0^3 - \frac{1}{x_0} \omega_0^3$ y por tanto:

$$(I) \quad \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle = \frac{\omega_0}{c_0 + c_2 \omega_0^2 + 2i\omega_0^3} C_3(q, q, \bar{q})$$

Resolviendo el correspondientes sistema lineal $t = N^{-1}B(q, q)$, donde la matriz inversa de N corresponde a: $N^{-1} = \frac{1}{\det N} \text{Adj} N$, es decir:

$$N^{-1} = \frac{1}{-c_0} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & 1 \\ -c_0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c_1}{-c_0} & \frac{c_2}{-c_0} & \frac{1}{-c_0} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tenemos

$$t = \begin{pmatrix} \frac{c_1}{-c_0} & \frac{c_2}{-c_0} & \frac{1}{-c_0} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_3(q, \bar{q}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{-c_0} B_3(q, \bar{q}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así mismo

$$B(q, N^{-1}B(q, \bar{q})) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2x_0}{-c_0} B_3(q, \bar{q}) (3\sigma i - \omega_0) \end{pmatrix}$$

$$(II) \quad \langle p, B(q, N^{-1}B(q, \bar{q})) \rangle = \frac{\omega_0}{c_0 + c_2\omega_0^2 + 2i\omega_0^3} \left(\frac{2x_0}{-c_0} B_3(q, \bar{q}) (3\sigma i - \omega_0) \right)$$

$$(2i\omega_0 I_n - N)^{-1} =$$

$$\frac{1}{((2i\omega_0)^3 + (2i\omega_0)^2 c_2 + 2i\omega_0 c_1 + c_0)} \begin{pmatrix} (2i\omega_0)^2 + 2i\omega_0 c_2 + c_1 & 2i\omega_0 + c_2 & 1 \\ -c_0 & (2i\omega_0)^2 + 2i\omega_0 c_2 & 2i\omega_0 \\ -2i\omega_0 c_0 & -2i\omega_0 c_1 - c_0 & (2i\omega_0)^2 \end{pmatrix}$$

$$(2i\omega_0 I_n - N)^{-1} B(q, q) = \frac{B_3(q, q)}{((2i\omega_0)^3 + (2i\omega_0)^2 c_2 + 2i\omega_0 c_1 + c_0)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i\omega_0 \\ (2i\omega_0)^2 \end{pmatrix}$$

$$B(\bar{q}, (2i\omega_0 I_n - N)^{-1} B(q, q)) =$$

$$\frac{B_3(q, q)}{((2i\omega_0)^3 + (2i\omega_0)^2 c_2 + 2i\omega_0 c_1 + c_0)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6\sigma x_0 i + 2x_0 \omega_0 + \frac{4(1+\sigma)}{x_0} \omega_0^2 i - \frac{2}{x_0} \omega_0^3 \end{pmatrix}$$

$$(III) \quad \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega_0 I_n - N)^{-1} B(q, q)) \rangle = \frac{\omega_0}{c_0 + c_2 \omega_0^2 + 2i\omega_0^3}$$

$$\left[\frac{B_3(q, q)}{((2i\omega_0)^3 + (2i\omega_0)^2 c_2 + 2i\omega_0 c_1 + c_0)} \left(-6\sigma x_0 i + 2x_0 \omega_0 + \frac{4(1+\sigma)}{x_0} \omega_0^2 i - \frac{2}{x_0} \omega_0^3 \right) \right]$$

Ahora, sustituyendo (I), (II) y (III) en (4.19)

$$\begin{aligned} l_1(0) &= \frac{1}{2\omega_0} \operatorname{Re} \left[\frac{\omega_0}{c_0 + c_2 \omega_0^2 + 2i\omega_0^3} \left(-6\sigma i + 6\omega_0 + \frac{2(1+\sigma)}{x_0^2} i \omega_0^2 - \frac{1}{x_0^2} \omega_0^3 - \frac{1}{x_0} \omega_0^3 \right) \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\omega_0}{c_0 + c_2 \omega_0^2 + 2i\omega_0^3} \left(\frac{2}{-c_0} [-4\sigma b(r-2) + 2b(r+\sigma^2)] (3\sigma i - \omega_0) \right) + \frac{\omega_0}{c_0 + c_2 \omega_0^2 + 2i\omega_0^3} \right. \\ &\quad \left. \left\{ \frac{[2br(4\sigma + 3\omega_0 i + 1) + 2b(\sigma - 2)(\sigma + \omega_0 i)]}{x_0((2i\omega_0)^3 + (2i\omega_0)^2 c_2 + 2i\omega_0 c_1 + c_0)} \left(-6\sigma x_0 i + 2x_0 \omega_0 + \frac{4(1+\sigma)}{x_0} \omega_0^2 i - \frac{2}{x_0} \omega_0^3 \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

Reemplazando los valores de $c_0, c_1, c_2, \omega_0, x_0$ y evaluando $l_1(r)$, con $r = 0$

$$\begin{aligned} l_1(0) &= \frac{1}{2\sqrt{b\sigma}} \operatorname{Re} \frac{\sqrt{b\sigma}}{-2b\sigma + (\sigma + b + 1)b\sigma - 2ib\sigma\sqrt{b\sigma}} \left[(-6i\sigma + 6\sqrt{b\sigma} + \frac{2(1+\sigma)}{-b} ib\sigma + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{b} b\sigma\sqrt{b\sigma} - \frac{1}{i\sqrt{b}} b\sigma\sqrt{b\sigma}) - 2 \frac{1}{b\sigma} (8\sigma b + 2b\sigma^2)(3\sigma i - \sqrt{b\sigma}) + \right. \\ &\quad \left. \frac{2b(\sigma - 2)(\sigma + i\sqrt{b\sigma}(6\sigma\sqrt{b} + 2i\sqrt{b}\sqrt{b\sigma} + \frac{4(1+\sigma)}{i\sqrt{b}} b\sigma i + \frac{2}{i\sqrt{b}} b\sigma\sqrt{b\sigma} - \frac{4}{i\sqrt{b}} b\sigma))}{i\sqrt{b}((2i\sqrt{b\sigma})^3 + (2i\sqrt{b\sigma})^2(\sigma + b + 1) + 2ib\sigma\sqrt{b\sigma} - 2\sigma b)} \right] \end{aligned}$$

Reduciendo términos y tomando la parte real,

$$l_1(0) = \frac{1}{2(\sigma^2 b + \sigma b^2 - \sigma b)} \left[6b\sigma + \sigma^2 b \sqrt{b\sigma} + 16\sqrt{b\sigma} + 4\sigma \sqrt{b\sigma} + \frac{\sigma - 2}{3b\sqrt{\sigma}} (10\sigma \sqrt{b} + 4\sigma^2 b) \right]$$

$$l_1(0) = \frac{1}{2(\sigma + b - 1)} \left[\frac{18b\sqrt{b\sigma} + 3\sigma^2 b^2 + 48b + 12\sigma b + 10\sigma - 20 + 4\sigma^2 \sqrt{b} - 8\sigma \sqrt{b}}{3b\sqrt{\sigma b}} \right]$$

Teniendo en cuenta que $\sigma > b + 1$, veamos que para $\sigma = \sigma^* + b + 1$ el coeficiente de Lyapunov es positivo para todo $\sigma^*, b > 0$.

$$l_1(0) = \frac{1}{2((\sigma^* + b + 1) + b - 1)3b\sqrt{(\sigma^* + b + 1)b}} [18b\sqrt{b(\sigma^* + b + 1)} + 3(\sigma^* + b + 1)^2 b^2 + 48b + 12b(\sigma^* + b + 1) + 10(\sigma^* + b + 1) - 20 + 4\sqrt{b}(\sigma^* + b + 1)^2 - 8\sqrt{b}(\sigma^* + b + 1)]$$

$$l_1(0) = \frac{1}{2(\sigma^* + 2b)3b\sqrt{(\sigma^* + b + 1)b}} [18b\sqrt{b(\sigma^* + b + 1)} + 3(\sigma^* + b + 1)^2 b^2 + 48b + 12b(\sigma^* + b + 1) + 10\sigma^* + 10b + 10 - 20 + 4\sigma^{*2}\sqrt{b} + 8\sigma^* b \sqrt{b} + 8\sigma^* \sqrt{b} + 8b\sqrt{b} + 4b^2 \sqrt{b} + 4\sqrt{b} - 8\sigma^* \sqrt{b} - 8b\sqrt{b} - 8\sqrt{b}]$$

$$l_1(0) = \frac{1}{(\sigma^* + 2b)3b\sqrt{(\sigma^* + b + 1)b}} [9b\sqrt{b(\sigma^* + b + 1)} + \frac{3}{2}(\sigma^* + b + 1)^2 b^2 + 24b + 6b(\sigma^* + b + 1) + 5\sigma^* + 5b + 2\sigma^{*2}\sqrt{b} + 4\sigma^* b \sqrt{b} + 2b^2 \sqrt{b} - 5 - 2\sqrt{b}]$$

Podemos observar que para cualquier valor de σ^* y b reales positivos, el coeficiente de Lyapunov es siempre positivo.

Resultado principal

Resumimos los resultados obtenidos de este capítulo en el siguiente

Teorema 3 *Considere el sistema de Lorenz*

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz . \\ \dot{z} &= -bz + xy \end{cases}$$

Si se considera r como parámetro de bifurcación del sistema, y σ, b como parámetros de control, sólo es posible encontrar puntos en el plano de los parámetros de control en los cuales el sistema exhibe una bifurcación de Hopf subcrítica.

Capítulo 5

El atractor geométrico de Lorenz

Para comprender y describir la dinámica subyacente del atractor de Lorenz con el fin de explicar si esa figura misteriosa que aparecía en los ordenadores, no revelaba nada más que un comportamiento transitorio de las ecuaciones de Lorenz, pero no un comportamiento asintótico, en 1976 los matemáticos J. Guckenheimer y R.F Williams elaboraron un modelo geométrico inspirados en las ecuaciones de Lorenz [GW], que era plausible pensar que se correspondía con ellas. El reto ahora era demostrar que la dinámica del modelo geométrico de Guckenheimer y Williams, coincidía con la del sistema definido por las ecuaciones de Lorenz para los parámetros $\sigma = 10$, $b = 8/3$ y $r = 28$; ver Figura 5.1.

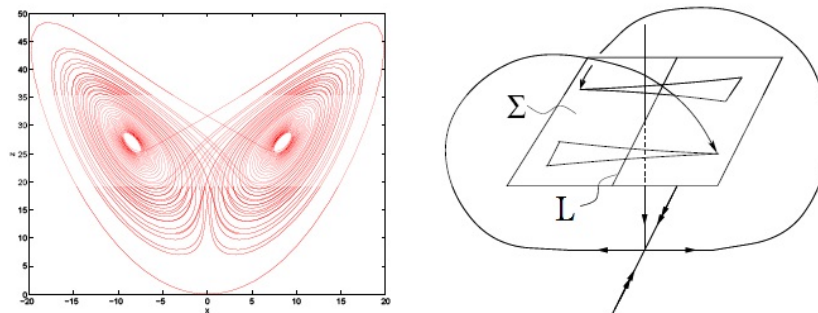


Figura 5.1: (a) *Atractor de Lorenz.* (b) *Modelo geométrico de Guckenheimer y Williams.*

La solución completa fue anunciada en 2002 por el matemático Warwick Tucker

[WT]. La prueba es una combinación de métodos basados en las formas normales, una técnica de la teoría de ecuaciones diferenciales ya utilizadas por Birkhoff en el ámbito de los sistemas dinámicos y el análisis numérico riguroso. Este último le permite identificar una región contenida en una sección del flujo con la propiedad de que todas las órbitas que parten de ella siempre retornan. Es de aquí, básicamente, de donde se deduce la existencia del atractor.

Para empezar, denotemos por $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ la esfera tridimensional. El atractor geométrico de Lorenz es un atractor en S^3 de un flujo que nosotros denotaremos por Y y que describiremos más adelante. Este atractor tiene como bloque aislante un bitoro sólido U en \mathbb{R}^3 tal que el flujo Y es transversal y apunta hacia adentro a lo largo de su frontera, ver Figura 5.2. En $S^3 \setminus U$ el flujo Y tiene tres singularidades hiperbólicas, dos de tipo- silla en $\mathbb{R}^3(C_1, C_2)$ con valores propios estables complejos, y una fuente en $\{\infty\}$.

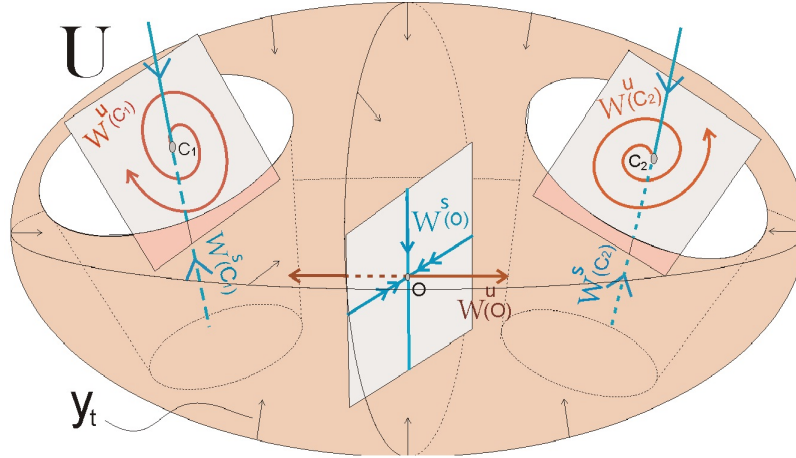


Figura 5.2: Bitoro sólido U en \mathbb{R}^3 , donde el flujo Y_t es transversal y apunta hacia adentro a lo largo de su frontera.

Dicho atractor lo definimos por:

$$\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} Y_t(U)$$

el conjunto maximal invariante de Y en U . El conjunto Λ es llamado *atractor geométrico de Lorenz*, el cual es motivado por el campo Lorenz: $X(x, y, z) = (-\sigma x +$

$\sigma y, rx - y - xz, xy - bz$; $\sigma, r, b > 0$. Ver Figura 5.3.

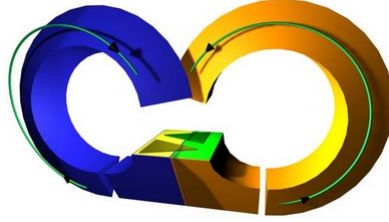


Figura 5.3: *El atractor geométrico de Lorenz*

Numéricamente se tienen algunas de las propiedades más importantes de las ecuaciones de Lorenz:

- (L1) **Singularidad:** El campo Y tiene una única singularidad $O = (0, 0, 0)$, la cual es hiperbólica como lo exhibe la ecuación de Lorenz, con un autovalor positivo $\lambda_1 > 0$ y dos negativos $\lambda_2 < \lambda_3 < 0$ tales que $\lambda_2 < \lambda_3 < 0 < -\lambda_3 < \lambda_1 < -\lambda_2$. Se deduce que la variedad inestable de la singularidad, $W^u(O)$, es uno-dimensional formada por dos trayectorias γ_+ y γ_- . La variedad estable de la singularidad, $W^s(O)$, es dos-dimensional.
- (L2) **Contracción:** Cerca al origen, el sistema Lorenz presenta una contracción en dirección transversa al plano xz .
- (L3) **Expansión:** Cerca al origen, el sistema Lorenz presenta una expansión sobre planos quasi-paralelos al plano xz .
- (L4) **Simetría:** La ecuación de Lorenz tiene una simetría natural es decir, si $(x(t), y(t), z(t))$ es solución, entonces $(-x(t), -y(t), z(t))$ también lo es, entonces cualquier solución o es simétrica o tiene una compañera simétrica.

5.1. Análisis del atractor geométrico

Cuando los parámetros en el campo Lorenz son $\sigma = 10$, $r = 28$ y $b = 8/3$, la simulación numérica, exhibe una conducta similar a un campo Y llamado el modelo

geométrico de Lorenz. Para entender este modelo geométrico, primero consideremos el flujo asociado al campo de Lorenz cerca al origen O . Así mismo el campo Y tiene en $O = (0, 0, 0)$ una singularidad hiperbólica y por el teorema de Hartman-Grobman, es posible *deformar* de manera continua todas las trayectorias del sistema no lineal alrededor del equilibrio aislado, en las trayectorias del sistema linealizado vía un homeomorfismo. En nuestro caso, el sistema no lineal de Lorenz es localmente topológicamente equivalente al sistema linealizado dado por el teorema de Hartman-Grobman en una vecindad del origen, ver Figura 5.4.

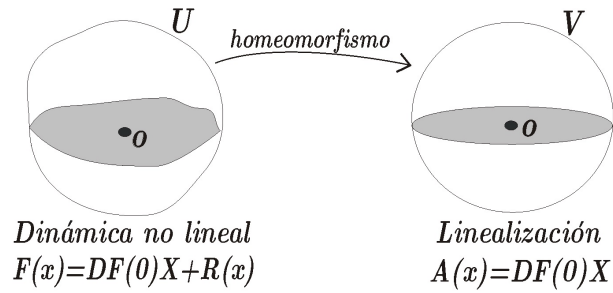


Figura 5.4: *Existe un homeomorfismo definido en un entorno de O que envía órbitas del sistema original en órbitas del sistema linealizado.*

Por lo tanto, al linealizar el sistema Lorenz tenemos que:

$$\begin{cases} \dot{x} &= \lambda_1 x \\ \dot{y} &= \lambda_2 y \\ \dot{z} &= \lambda_3 z \end{cases}$$

Resolviendo este sistema con las condiciones iniciales $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, 1)$ tenemos:

$$\begin{cases} x(t) = x_0(e^t)^{\lambda_1} \\ y(t) = y_0(e^t)^{\lambda_2} \\ z(t) = (e^t)^{\lambda_3} \end{cases}$$

Sea $x_0 > 0$ y sea T la primera vez que la órbita intersecta el plano $x = 1$, es decir,

$x(T) = 1$. Entonces $e^T = (x_0)^{-1/\lambda_1}$ y por lo tanto

$$\begin{cases} x(T) = 1 \\ y(T) = y_0(x_0)^{-\lambda_2/\lambda_1} \\ z(T) = (x_0)^{-\lambda_3/\lambda_1} \end{cases} \quad (5.1)$$

Sea $\Sigma = \{(x, y, 1) : |x| \leq 1/2, |y| \leq 1/2\}$ una *sección de Poincaré* del campo Y tal que la aplicación de primer retorno F está bien definida en $\Sigma^* = \Sigma \setminus \{x = 0\}$. La recta $x = 0$ en Σ está contenida en la intersección de la variedad estable $W^s(0, Y) = \{p \in \mathbb{R}^3 / \omega_Y(p) \in \{0\}\}$ con Σ . Sea

$$F : \Sigma^* \rightarrow \text{int}(\Sigma) : p \rightarrow F(p)$$

definida por $F(p) = Y_\tau(p)$, donde τ es el primer tiempo positivo tal que $Y_\tau(p) \in \Sigma$.

Asumamos las siguientes hipótesis acerca del campo Y (ver [GH], pag 273):

[(H1)] El punto $O = (0, 0, 0)$ tiene valores propios λ_1, λ_2 y λ_3 que satisfacen la condición $0 < -\lambda_3 < \lambda_1 < -\lambda_2$, donde λ_3 es el valor propio del eje z , el cual es asumido invariante bajo el flujo generado por Y . Ver Figura 5.5

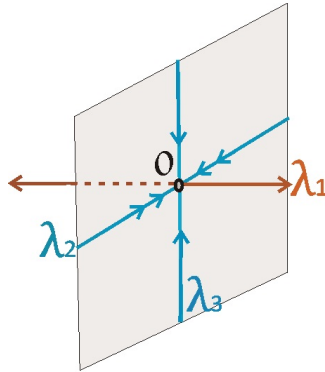


Figura 5.5: *Localmente se tiene que $\lambda_2 < \lambda_3 < 0 < -\lambda_3 < \lambda_1 < -\lambda_2$.*

[(H2)] Existe una foliación \mathfrak{S}^s de Σ cuyas folias son segmentos de línea, tal que si $L \in \mathfrak{S}^s$ y F está definida en L , entonces $F(L)$ está contenida en una folia de \mathfrak{S}^s . La foliación \mathfrak{S}^s es parte de la variedad estable fuerte para el flujo, el cual está definido en una vecindad del atractor. Ver Figura 5.6

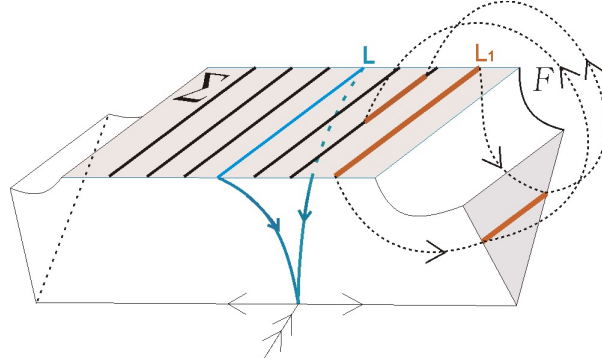


Figura 5.6: La aplicación de retorno F contrae la folia L_1 , donde $F(L_1)$ cae sobre otra folia.

La función F de retorno sobre la sección transversal Σ se muestra a continuación:

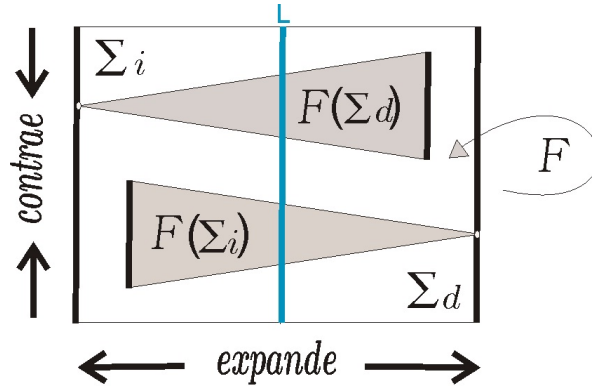


Figura 5.7: La función de retorno F contrae en la dirección vertical y expande en dirección horizontal. $\Sigma = \Sigma_i \cup L \cup \Sigma_d$.

[(H3)] Todo punto de Σ^* retorna a Σ , y la aplicación de retorno F es suficientemente expansiva en la dirección transversa a las folias de \mathfrak{F}^s . Ver Figura 5.7.

[(H4)] El flujo es simétrico con respecto a la rotación $\theta = \pi$ alrededor del eje z , ver Figura 5.8. El sistema Lorenz cumple igualmente esta propiedad, pues al cambiar x por $-x$ y y por $-y$ el campo Lorenz se muestra invariante, es decir: $X(x, y, z) = X(-x, -y, z)$.

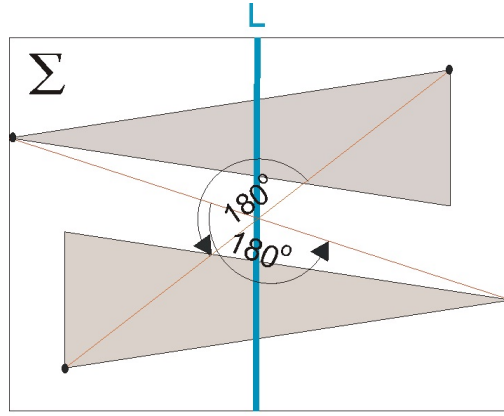


Figura 5.8: El flujo es simétrico con respecto a la rotación $\theta = \pi$ alrededor del eje z .

Estas cuatro hipótesis definen el *flujo geométrico de Lorenz*. Analíticamente estas hipótesis pueden ser reformuladas del modo siguiente con un sistema de coordenadas (x, y) sobre Σ tal que F tiene las propiedades siguientes:

(P1) Las folias de \mathfrak{F}^s están dadas por $x = c$, con $-1/2 \leq x \leq 1/2$.

(P2) Existen funciones f y g tales que F tiene la forma

$$F(x, y) = (f(x), g(x, y)) \text{ para } x \neq 0 \text{ y } F(-x, -y) = -F(x, y).$$

(P3) $f'(x) \geq \lambda > \sqrt{2}$ para todo $x \neq 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \infty$.

(P4) $0 < \frac{\partial g}{\partial y} < \delta < 1$ para todo $x \neq 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial g}{\partial y} = 0$.

Observación 2 *Observe que:*

1. Excepto del hecho que F no está definida en $x = 0$, las propiedades (P3) y (P4) implican que las órbitas de F tienen estructura hiperbólica en Σ .
2. Por hipótesis (H1) y la ecuación (5.1) tenemos que $z(T) = (x_0)^{-\lambda_3/\lambda_1} > x_0$. Por lo tanto, cerca al origen $O = (0, 0, 0)$ existe una expansión transversa a la foliación \mathfrak{F}^s . Como se puede observar en la Figura 5.9.

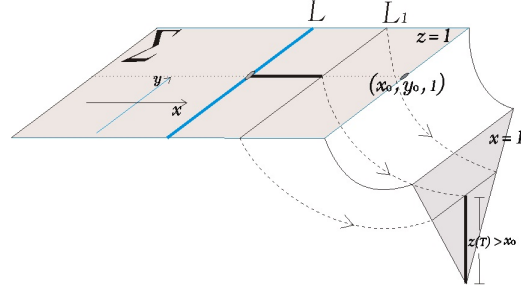


Figura 5.9:

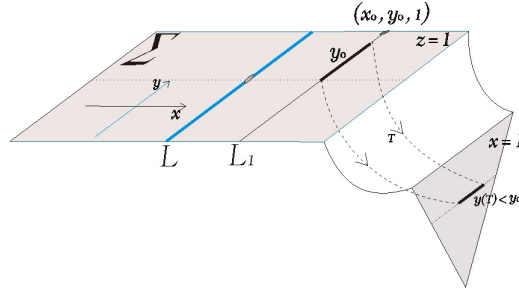


Figura 5.10:

3. Finalmente podemos pensar que cada folia $L \in \mathfrak{S}^s$ esta contenida en la intersección de Σ con $W^s(q, Y)$ para algún $q \in L$ y $L \subset W^{ss}(q, Y)$. Aquí $W^s(q, Y) = W^s(O_Y(q), Y)$ y $W^{ss}(q, Y) = \{p \in \mathbb{R}^3 / \lim_{t \rightarrow \infty} d(Y_t(q), Y_t(p)) = 0\}$ son las variedades estable y estable fuerte de q por el flujo Y_t asociado al campo Y . Esto se puede observar en la Figura 5.11.

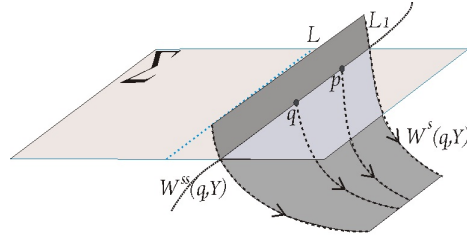


Figura 5.11:

5.2. El atractor geométrico de Lorenz es una clase homoclínica

Una *clase homoclínica* asociada a una órbita periódica hiperbólica $O = O_X(p)$ de X , denotada por $H_X(p)$, es la clausura del conjunto de puntos de la intersección transversal entre $W^s(p, X)$ y $W^u(p, X)$ correspondientes a la variedad estable e inestable de la órbita de p por X . Ver corte transversal de una clase homoclínica en la Figura 5.12.

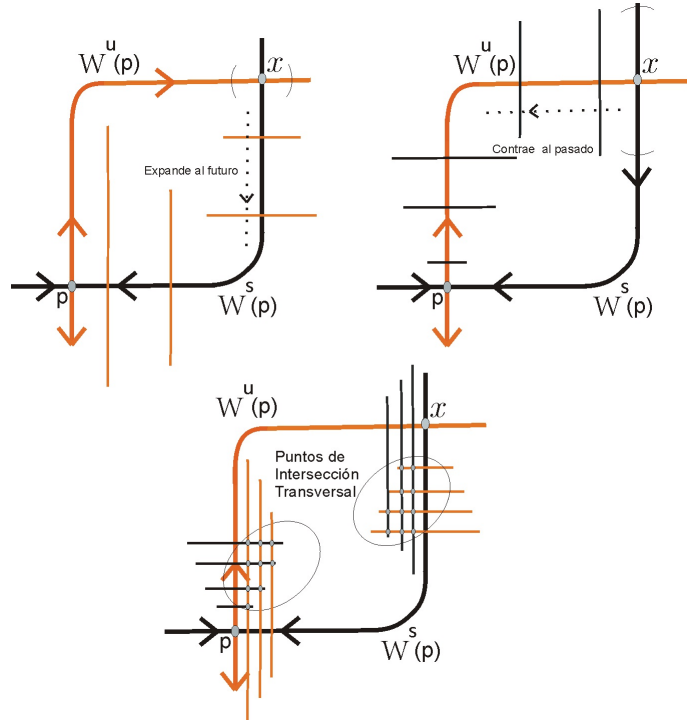


Figura 5.12: $H_X(p) = CL(W^u(p, X) \cap W^s(p, X))$.

Descrito el atractor geométrico de Lorenz en la sección anterior, nuestro objetivo ahora es reconstruir la demostración hecha en [B], la cual muestra el siguiente resultado:

Teorema 4 *El Atractor geométrico de Lorenz es una clase homoclínica.*

La prueba de este teorema es basada en la existencia de una función de retorno F para el flujo geométrico de Lorenz, el cual preserva una foliación estable (cuyos niveles son líneas verticales) de una sección transversal de el flujo. La función f inducida en el espacio de folias por F es diferenciable y expandible. Entonces la dinámica se reduce a dinámica unidimensional.

Corolario 1 *El atractor geométrico de lorenz es la clausura de sus órbitas periódicas y es transitivo.*

Demostración. El Teorema de Birkhoff-Smale afirma que: dado un difeomorfismo f , un punto fijo p hiperbólico y x un punto homoclínico transversal, entonces, existe $N > 0$ y un conjunto Λ f^N -invariante (que contiene p y x) tal que $f^N|_\Lambda$ es conjugado al Shift de Bernoulli de dos símbolos y además Λ es hiperbólico. El Shift de Bernoulli, establece que la clase homoclínica asociada a un punto periódico hiperbólico tiene órbitas periódicas densas y es transitivo. ■

Sea $B = [-1/2, 1/2]$ el espacio de folias de la foliación \mathfrak{S}^s , es decir, B es el espacio cociente de Σ por \mathfrak{S}^s con $\pi : \Sigma \rightarrow B : (x, y) \rightarrow x$ la aplicación proyección.

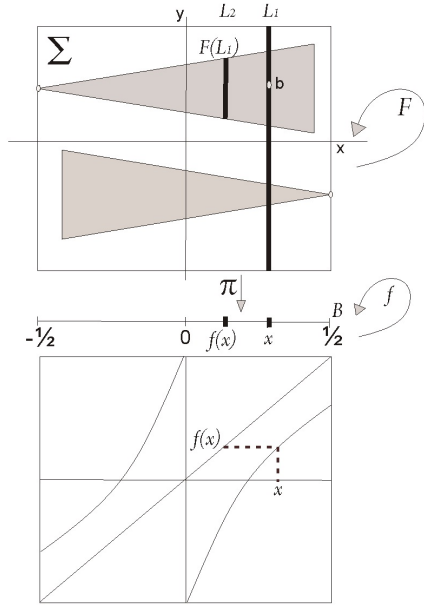
Con respecto a la propiedad **(P2)**, sea $f : B \setminus \{0\} \rightarrow B$ la aplicación cociente inducida por F , donde $f \circ \pi = \pi \circ F$. Ver Figura 5.13. Note que $f(B \setminus \{0\}) = (-1/2, 1/2)$.

Si $V \subset \Sigma$ y $J \subset B$, tenemos las siguientes convenciones: $F(V) := F(V \setminus \{x = 0\})$, $f(J) := f(J \setminus \{0\})$ y $B^0 = (-1/2, 1/2)$. Por lo tanto podemos escribir $f : B \rightarrow B$, $f : B^0 \rightarrow B^0$ y $F : \Sigma \rightarrow \Sigma$. Definimos

$$A = CL \left(\bigcap_{n \geq 0} F^n(\Sigma) \right). \quad (5.2)$$

Aquí $CL(S)$ denota la clausura de S . Claramente todo punto de Σ tiende a A o tiene trayectorias que “mueren” en la folia $x = 0$, donde F no está definida.

Teorema 5 *El subconjunto compacto invariante A de F es una clase homoclínica para F .*



F función de retorno de Σ . f función inducida por F en el espacio de folias B , con $B = [-1/2, 1/2]$.

$$f \circ \pi = \pi \circ F.$$

Dado $L_1 \subseteq \Sigma$, sea $L_2 \subseteq \Sigma$ tal que $F(L_1) \subseteq L_2$. Entonces sea $x = \pi(L_1)$ y $f(x) = \pi(L_2)$.

Figura 5.13: *Funciones del modelo geométrico de Lorenz*

5.3. Demostración de teoremas

El teorema 4 es consecuencia directa del teorema 5. Por lo tanto, primero probaremos el teorema 4 usando el teorema 5 y al final de la sección probaremos el teorema 5.

Demostración. Teorema 4. Dado que

$$\Lambda = CL \left(\bigcup_{t \geq 0} Y_t(A) \right),$$

entonces, por el teorema 5, tenemos que Λ es una clase homoclínica del flujo Y . ■

5.3.1. Lemas previos

Antes de probar el teorema 5, vamos a probar algunos lemas auxiliares con respecto al conjunto A , la transformación de retorno F y la transformación inducida por F

en el espacio de folias.

Lema 1 *La transformación $f : B^0 \rightarrow B^0$ es LEO (localmente eventualmente sobre), es decir, para todo intervalo abierto I de B^0 existe un número entero $n \geq 0$ tal que $f^n(I) = (-1/2, 1/2)$.*

Demostración. Denotemos por $l(I)$ la longitud del intervalo I y sea $I_0 \subset B^0$ un intervalo abierto.

1. Si $0 \notin I_0$, entonces $I_1 = f(I_0)$, por la propiedad (P3), $f'(x) \geq \lambda > \sqrt{2} \forall x \neq 0$, de aquí $\int_{I_1} dl = \int_{I_0} f' dl \geq \int_{I_0} \lambda dl$ y por tanto $l(I_1) \geq \lambda l(I_0)$. Sustituya I_0 por I_1 y continúe el algoritmo.
2. Si $0 \in I_0$ elija $I_0^+ =$ como la mayor componente conexa de $I_0 \setminus \{0\}$, entonces $l(I_0^+) \geq (1/2)l(I_0)$. Ahora vamos a analizar $f(I_0^+)$:

2.1 En el caso $0 \notin f(I_0^+)$, entonces $I_1 = f^2(I_0^+)$, $l(I_1) \geq (\lambda^2/2)l(I_0)$, sustituya I_0 por I_1 y continúe el algoritmo.

2.2 En el caso $0 \in f(I_0^+)$, entonces $f^2(I_0^+)$ contiene $(-1/2, 0]$ o $[0, 1/2)$ y en este caso tenemos que $f^4(I_0^+) = (-1/2, 1/2)$ y el algoritmo finaliza.

Ahora, sea $\beta = \min\{\lambda, \lambda^2/2\} > 1$. Entonces en cualquier caso (1) o (2.1) tenemos que $l(I_1) \geq \beta l(I_0)$. Como $(-1/2, 1/2)$ es de longitud finita, existe $n \geq 0$ tal que $f^n(I_0) = (-1/2, 1/2)$. ■

Lema 2 *Sea $f : B^0 \rightarrow B^0$ tal como arriba. Entonces para todo $x \in B^0$, se tiene que*

$$B = CL \left(\bigcup_{k \geq 0} f^{-k}(\{x\}) \right)$$

Demostración. Basta demostrar que $(\bigcup_{k \geq 0} f^{-k}(\{x\}))$ es denso. Sea $I \subset B^0$ cualquier intervalo pequeño abierto y $x \in B^0$. Dado que f es Leo, existe $n \geq 0$ tal que $f^n(I) = (-1/2, 1/2)$. Entonces $x \in f^n(I)$ y así mismo al iterar x al pasado, tendrá pre-imágenes, que caerán en I en un tiempo determinado, independientemente del tamaño de I , de donde $f^{-n}(\{x\}) = \{y \in B / f^n(y) = x\}$, por tanto $f^{-n}(\{x\}) \cap I \neq \emptyset$, y de donde $(\bigcup_{k \geq 0} f^{-k}(\{x\})) \cap I \neq \emptyset$, probando el lema. ■

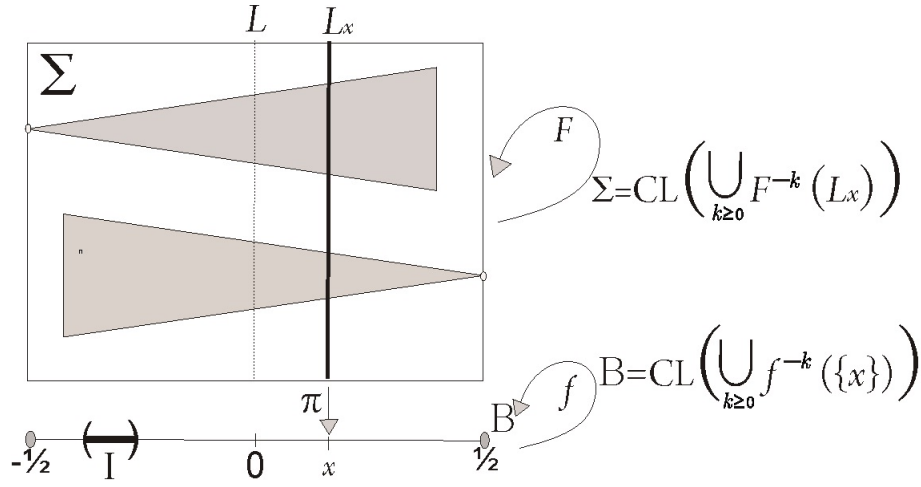


Figura 5.14: Al iterar x al pasado, tendrá pre-imágenes que caerán en I en un tiempo determinado, independientemente del tamaño de I .

Observe que de acuerdo a la Figura 5.14, el lema 2 implica que para cada folia $L_x = \pi^{-1}(x)$ con $x \neq \pm 1/2$ tenemos

$$\Sigma = CL \left(\bigcup_{k \geq 0} F^{-k}(L_x) \right)$$

Sea V un abierto cualesquiera de Σ y $p \in \Sigma$, como $\pi : \Sigma \rightarrow B$, donde B es el espacio cociente de Σ por \mathfrak{S}^s es una aplicación abierta, $\pi(V)$ es un abierto en B , supongamos además que es un intervalo; siendo f Leo, existe $n \geq 0$ tal que $f^n(\pi(V)) = B$. Por otro lado se tiene que $f \circ \pi = \pi \circ F$, así que $f^n \circ \pi = \pi \circ F^n$. Como $p \in \Sigma$ y $\pi(p) = x \in B$, $x \in f^n(\pi(V)) = \pi(F^n(V))$. Luego $F^n(V) \cap L_x \neq \emptyset$ de donde $F^{-n}(L_x) \cap V \neq \emptyset$ para algún $n \geq 0$ y cualquier abierto de Σ . Luego $(\bigcup_{n \geq 0} F^{-n}(L_x)) \cap V \neq \emptyset$, quedando demostrado lo que se planteó.

Lema 3 La transformación $f : B \rightarrow B$ tiene puntos periódicos densos

Demostración. Sea $I \subset B^0$ cualquier intervalo pequeño abierto. Por el lema 1 existe $n \geq 0$ tal que $f^n(I) = (-1/2, 1/2) \supset I$. Entonces f^n tiene un punto fijo en I lo cual implica que existe un punto periódico de f en I , probando el Lema. ■

Lema 5 Para todo punto periódico p de F , se tiene

$$\Sigma \setminus (L_{-1/2} \cup L_{1/2}) = \bigcup_{(x', y') \in W^u(p, F)} L_{x'}.$$

Demostración. Dado que p es un punto periódico de F , entonces $O_F(p) \subset \cap_{n \geq 0} F^n(\Sigma)$ y por la observación (2), existe $W^u(p, F)$. Sea $I = W_\epsilon^u(p, F)$ para algún $\epsilon > 0$ pequeño, la variedad estable local de p por F . Esta se puede ver como la componente conexa ϵ -local de $W^s(p, F)$ que contiene al punto p . Dado que f es LEO, existe $n \geq 0$ tal que $f^n(\pi(I)) = (-1/2, 1/2)$. Por otro lado $f^n(\pi(I)) = \pi(F^n(I))$. Si $(x, y) \in \Sigma \setminus (L_{-1/2} \cup L_{1/2})$ entonces $\pi(x, y) = x \in (-1/2, 1/2) = \pi(F^n(I))$. Por lo tanto $L_x \cap F^n(I) \neq \emptyset$ y como $F^n(I) \subset W^u(p, F)$ entonces existe $(x', y') \in W^u(p, F) \cap L_x$ con $L_x = L_{\pi(x', y')} = L_{x'}$.

La otra contención implica que $A = CL(\cap_{n \geq 0} F^n(\Sigma)) \subset \cap_{n \geq 0} F^n(\Sigma) \subset F^n(\Sigma) \subset \Sigma$ y dado que A es un atractor y p es un punto periódico hiperbólico, se tiene que $W^u(p, F) \subseteq A$. ■

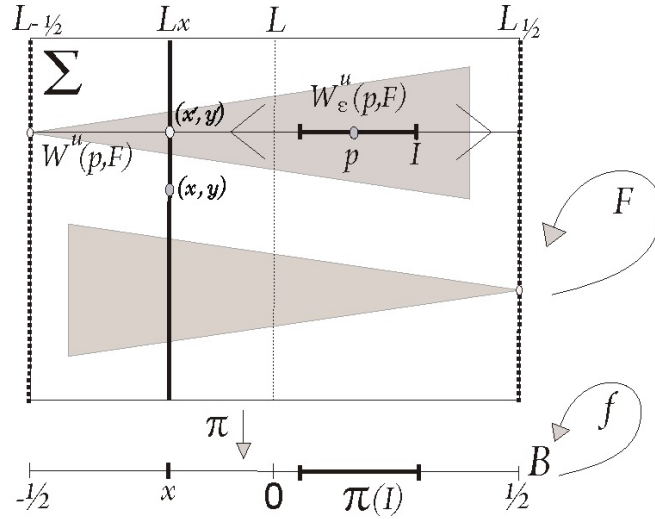


Figura 5.16: $F^n(I) \subset W^u(p, F)$ entonces existe $(x', y') \in W^u(p, F) \cap L_x$ con $L_x = L_{\pi(x', y')} = L_{x'}$.

Lema 6 *Para todo punto periódico p de la transformación F , se tiene lo siguiente*

$$CL(W^u(p, F)) = A.$$

Demostración. Veamos que $CL(W^u(p, F)) \subseteq A$. Para probar esto, observe que $F^k(p) \notin L_{-1/2} \cup L_{1/2}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, entonces $O_F(p) \subset \text{int}(\Sigma)$, así mismo existe un $\epsilon > 0$ pequeño tal que $W_\epsilon^u(F^{-k}(p), F) \subset \Sigma$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Por tanto para cualquier $k \geq 0$,

$$W^u(F^{-k}(p), F) = \bigcup_{j \geq 0} F^j(W_\epsilon^u(F^{-j}(F^{-k}(p)), F))$$

y

$$W^u(p, F) = F^k(W^u(F^{-k}(p), F)) \subset F^k(\Sigma).$$

Entonces

$$CL(W^u(p, F)) \subset CL\left(\bigcap_{k \geq 0} F^k(\Sigma)\right) = A.$$

Ahora veamos que $A \subseteq CL(W^u(p, F))$. Para esto es suficiente probar que $\bigcap_{n \geq 0} F^n(\Sigma) \subseteq CL(W^u(p, F))$. Si $(x, y) \in \bigcap_{n \geq 0} F^n(\Sigma)$, y dado que F contrae folias de \mathfrak{F}^s (ver propiedad **(P4)**), tenemos que para todo $\epsilon > 0$ existen $n_\epsilon \geq 0$ tal que $d((x, y), (x, w)) < \epsilon$ para todo $(x, w) \in F^{n_\epsilon}(L_{x'})$, donde

$$L_{x'} \in F^{-n_\epsilon}(L_x) = \{L' \in \mathfrak{F}^s : F^{n_\epsilon}(L') \subset L_x\} \text{ y } (x, y) \in F^{n_\epsilon}(L_{x'}).$$

Por el Lema 5, tenemos que

$$\Sigma \setminus (L_{-1/2} \cup L_{1/2}) \subset \bigcup_{(x', y') \in W^u(p, F)} L_{x'},$$

Entonces existe $(x', y') \in W^u(p, F) \cap L_{x'}$. Donde $d((x, y), F^{n_\epsilon}(x', y')) < \epsilon$. Dado que ϵ es arbitrario y $F^{n_\epsilon}(x', y') \in W^u(p, F)$ concluimos que $(x, y) \in CL(W^u(p, F))$. Ver Figura 5.17. ■

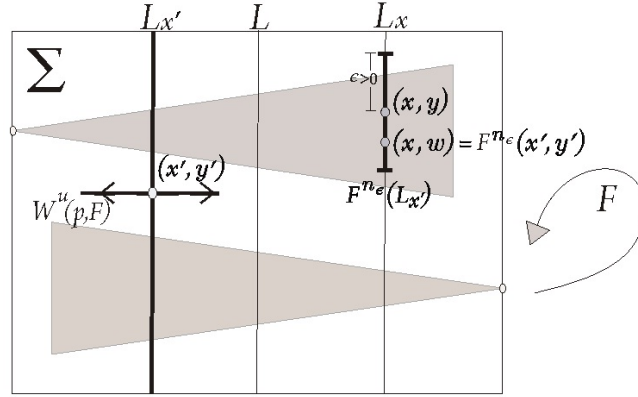


Figura 5.17: Dado un punto $(x, y) \in \cap_{n \geq 0} F^n(\Sigma)$, existe $(x', y') \in W^u(p, F) \cap L_{x'}$, donde $d((x, y), F^{n_\epsilon}(x', y')) < \epsilon$ y $F^{n_\epsilon}(x', y') \in W^u(p, F)$ implica que $(x, y) \in CL(W^u(p, F))$.

Demostración. Teorema 5: Dado que $H_F(p) = CL(W^u(p, F) \pitchfork W^s(p, f)) \subset CL(W^u(p, F))$, entonces por el Lema 6 tenemos que $H_F(p) \subset A$.

Ahora probaremos que $A \subset H_F(p)$. Por el Lema 6 es suficiente probar que $W^u(p, F) \subset H_p(F)$. Sea $q \in W^u(p, F) \subset A$ y escoja $I \subset W^u(p, F)$ cualquier intervalo abierto horizontal tal que $q \in I$. Sea L la folia estable que contiene al punto p . Dado que f es LEO, existe $n \geq 0$ tal que $f^n(\pi(I)) = (-1/2, 1/2)$. Entonces $F^n(I) \cap L \neq \emptyset$ y por tanto, $I \cap F^{-n}(L) \neq \emptyset$. Entonces existe $s \in I \cap F^{-n}(L) \subset W^u(p, f) \pitchfork W^s(p, F)$ cerca de q . Esto prueba el teorema 5. ■

Bibliografía

- [B] Bautista, S. *The Geometric Lorenz is a Homoclinic Class*. Boletín De Matemáticas, Volumen 11, Nueva Serie $N_0,1$ (2004), 69-78.
- [BC] Baca Carrasco, D. *Análisis Paramétrico de La Bifurcación de Hopf en Sistemas tipo Lorenz*. Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora. Hermosillo, Son. Junio de 2007.
- [E] Etchechoury, M. *Sistemas No Lineales*. Departamento de Matemáticas, facultad de ciencias exactas, Universidad Nacional de la Plata.
- [GH] Guckenheimer, J. and Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Springer- Verlag, 1983.
- [G-W] Guckenheimer, J. and Williams, R. *Structural stability of Lorenz attractors*. Publ Math IHES **50** (1979), 59-72.
- [K] Kuznetsov, Y. Elements of applied bifurcation theory. 2000
- [L] Lorenz, E. *Deterministic nonperiodic flow*, J. of Atmosph. Sci. 20 (1963), 130-141.
- [M] Metzger, R.J. *El Atractor de Lorenz Geométrico*, IMPA-Rio de Janeiro, Julio de 1998.
- [S] Sambarino, M. *Dinámica en Superficies*, VI Escuela Internacional-Santiago de Chile, Julio de 2007.
- [SM] Sambarino, M. *Hiperbolicidad y estabilidad*, Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Caracas - Venezuela, 2009.

- [SO] Sotomayor, J. *Soluciones de ecuaciones diferenciables ordinarias*. Proyecto de Euclides, Impa, 1979.
- [SP] Sparrow, C. *The Lorenz equation bifurcations, chaos and strange attractors*. Springer - Verlag, 1982.
- [W] Williams, R. *The structure of Lorenz attractors*. Publ Math IHES **50** (1979), 73-99.

Índice alfabético

órbita, 6

 cerrada, 6

 Periódica, 6

Atractor Geométrico, 50

Bloque aislante, 6

Conjunto

 Aislado, 6

 Atractor, 6

 Attracting, 6

 Hiperbólico, 7

 Invariante, 6

 No-trivial, 6

 Omega limite, 6

 Singular-hiperbólico, 8

 Transitivo, 6

Descomposición

 Dominada, 7

Expande volumen, 8

Punto

 no-errante, 6

Singularidad, 6

Variedad, 5